مسائل آنالیز تابعی ۲

تمرین‌ها

۱.۰ فرض کنید $A, B, C \in \mathbf{B}(\mathcal{H})$. نشان دهید

(آ) اگر A و B خودالحاق و $\pm A \leq B$، بالاخص اگر $0 \leq A \leq B$، آنگاه $\|A\| \leq \|B\|$.

(ب) $\|A^*B + B^*A\| \leq \|A^*A + B^*B\|$.

(ج) اگر AB خودالحاق باشد آنگاه $\|AB\| \leq \|BA\|$.

(د) اگر $A, B \geq 0$، آنگاه $\|A^{1/2}B^{1/2}\| \leq \|AB\|^{1/2}$.

(هـ) $\|ABC\| = \||A|B|C^*|\|$.

(و) $\|AB^*\| = \||A||B|\|$.

(ز) $\|A^2\| = \||A||A^*|\|$.

۲.۰ (آ) عملگرهای $A, B \in \mathbf{B}(\mathcal{H})$ را چنان بیابید که $|A + B| \nleq |A| + |B|$.

(ب) اگر A نرمال باشد آنگاه $|A + A^*| \leq |A| + |A^*|$.

(ج) اگر $A = B + iC$ تجزیه دکارتی A باشد، نشان دهید A نرمال است اگروفقط‌اگر

$BC = CB$، و این معادل با این است که به‌ازای هر $x \in \mathcal{H}$،

$$\|Ax\|^۲ = \|Bx\|^۲ + \|Cx\|^۲ .$$

(د) اگر $A \in \mathbf{B}(\mathcal{H})$ نرمال باشد، آنگاه $A|A| = |A|A$.

۳.۰ فرض کنیم $A, B, C \in \mathbf{B}(\mathcal{H})$. نشان دهید

(آ) $A^*B = \frac{۱}{۴}\sum_{k=۰}^{۳} |B + i^k A|$.

(ب) $|AB| \leq \|A\|\,|B|$.

(ج) اگر $C \geq ۰$، آنگاه $A^*CA \leq \|C\|A^*A$.

(د) $A^*CB + B^*C^*A = ۲\mathrm{Re}(A^*CB) \leq \|C\|\,(|A|^۲ + |B|^۲)$.

(هـ) اگر $۰ \leq A \leq B$، آنگاه $A(I_{\mathcal{H}} + A)^{-۱} \leq B(I_{\mathcal{H}} + B)^{-۱}$.

۴.۰ فرض کنیم $A, B, C \in \mathbf{B}^+(\mathcal{H})$. نشان دهید

(آ) $\|(I_{\mathcal{H}} - A)(I_{\mathcal{H}} + A)^{-۱}\| \leq ۱$.

(ب) $\|A\| \leq \|A + B\|$.

(ج) اگر $\|I_{\mathcal{H}} + A\| \leq ۱$، آنگاه $A = ۰$.

(د) اگر $\|AB\| \leq ۱$، آنگاه به‌ازای هر $۰ \leq r \leq ۱$، $\|A^rB^r\| \leq ۱$.

۵.۰ فرض کنیم $A_i, B_i \in \mathbf{B}(\mathcal{H})$ و $\lambda_i \in \mathbb{C}$ $(i = ۱, \cdots, n)$. نشان دهید

(آ) $\sum_{i=۱}^n |\lambda_i|^۲ \sum_{i=۱}^n A_iA_i^* \geq |\sum_{i=۱}^n \lambda_i A_i|^۲$.

(ب) $\sum_{i=۱}^n |\lambda_i|^۲\, \|\sum_{i=۱}^n A_iA_i^*\| \geq \|\sum_{i=۱}^n \lambda_i A_i\|^۲$.

(ج) $n\,\|\sum_{i=۱}^n A_iA_i^*\| \geq \|\sum_{i=۱}^n A_i\|^۲$.

(د) $\|\sum_{i=۱}^n (A_i + B_i)^*(A_i + B_i)\| \leq ۲\,\|\sum_{i=۱}^n A_i^*A_i\| + ۲\,\|\sum_{i=۱}^n B_i^*B_i\|$.

۶.۰ فرض کنیم $A \in \mathbf{B}(\mathcal{H})$ و $x, y \in \mathcal{H}$. نشان دهید

(آ) $|\langle Ax, y\rangle|^۲ \leq |\langle |A|x, x\rangle||\langle |A^*|y, y\rangle|$.

(ب) اگر $A \geq ۰$، آنگاه $\|Ax\|^۲ \leq \|A\|\langle Ax, x\rangle$.

۷.۰ فرض کنیم $f : [۰, \infty) \to [۰, \infty)$ تابعی صعودی و پیوسته بوده و $A \in \mathbf{B}^+(\mathcal{H})$ باشد. نشان دهید

$$\|f(A)\| = f(\|A\|) .$$

۸.۰ فرض کنیم $f : [\circ, \infty) \to [\circ, \infty)$ تابعی پیوسته بوده، $A, B \in \mathbf{B}^{+}(\mathcal{H})$ و $\circ \leq \lambda \leq ۱$ باشد.

(آ) اگر f محدب و صعودی باشد، آن‌گاه

$$\left\| f\big((۱-\lambda)A+\lambda B\big) \right\| \leq \|(۱-\lambda)f(A)+\lambda f(B)\| \,.$$

(ب) اگر f مقعر باشد، آن‌گاه

$$\left\| f\big((۱-\lambda)A+\lambda B\big) \right\| \geq \|(۱-\lambda)f(A)+\lambda f(B)\| \,.$$

(ج) اگر f محدب و $f(\circ)=\circ$ باشد، آن‌گاه

$$\|f(A)+f(B)\| \leq \|f(A+B)\| \,.$$

(د) اگر f مقعر باشد، آن‌گاه

$$\|f(A)+f(B)\| \geq \|f(A+B)\| \,.$$

۹.۰ اگر A و B عملگرهای مثبت و وارون‌پذیر بر فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ باشند، آن‌گاه

$$(A\ln A+B\ln B)(A+B)^{-۱}(A\ln A+B\ln B) \leq A(\ln A)^{۲}+B(\ln B)^{۲} \,.$$

۱۰.۰ فرض کنیم A عملگری مثبت و وارون‌پذیر بر فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ باشد به‌طوری‌که برای اعداد $M > m > \circ$ داشته باشیم $MI_{\mathcal{H}} \geq A \geq mI_{\mathcal{H}} > \circ$. نشان دهید برای هر بردار یکه $x \in \mathcal{H}$ داریم

(آ)

$$\begin{aligned}[\ln S(۱)]\langle Ax,x\rangle + \langle Ax,x\rangle \ln\langle Ax,x\rangle &\geq \langle (A\ln A)x,x\rangle \\ &\geq \langle Ax,x\rangle \ln\langle Ax,x\rangle \,.\end{aligned}$$

(ب)

$$[\ln S(۱)] + \langle (\ln A)x,x\rangle \geq \ln\langle Ax,x\rangle \geq \langle (\ln A)x,x\rangle \,,$$

که در آن $S(۱) = \dfrac{h^{\frac{۱}{h-۱}}}{e h^{\frac{۱}{h-۱}}}$ نسبت اسپشت[1] است.

[1] Specht ratio

۱۱.۰ فرض کنیم $A, B \in \mathbf{B}^+(\mathcal{H})$. نشان دهید

(آ) $\|A+B\| \leq \frac{۱}{۲}\left(\|A\|+\|B\|+\sqrt{(\|A\|+\|B\|)^{۲}+۴\|A^{۱/۲}B^{۱/۲}\|}\right)$.

(ب) $\|A+B\| \leq \max\left(\|A\|, \|B\|\right)+\|A^{۱/۲}B^{۱/۲}\|$.

۱۲.۰ فرض کنیم $A \in \mathbf{B}(\mathcal{H})$. نشان دهید

(آ) $\left\||A|+|A^*|\right\| \leq \|A\|+\|A^{۲}\|^{\frac{۱}{۲}}$.

(ب) $\left\||A|^{۲}+|A^*|^{۲}\right\| \leq \|A\|^{۲}+\|A^{۲}\|$.

۱۳.۰ فرض کنیم $A, B, C \in \mathbf{B}(\mathcal{H})$. نشان دهید

(آ) $\|A^*AC+CBB^*\| \geq ۲\|ABC\|$.

(ب) $\left\||A|^{۲}+|B|^{۲}\right\| \geq ۲\left\||A||B|\right\|$.

(ج) اگر A و C خودالحاق و وارون‌پذیر باشند، آن‌گاه

$$\|ABC^{-۱}+A^{-۱}BC\| \geq ۲\|B\|\,.$$

۱۴.۰ نشان دهید توابع محدب عملگری و یکنوای عملگری بر هر بازه باز تحلیلی هستند.

۱۵.۰ برد عددی و شعاع عددی عملگر $A \in \mathbf{B}(\mathcal{H})$ به ترتیب به صورت زیر تعریف می‌شوند

$$W(A)=\{\langle Ax, x\rangle \ : \ x \in \mathcal{H} \text{ و } \|x\|=۱\}\,,$$

$$w(A)=\sup\{|\lambda| \ : \ \lambda \in W(A)\}\,.$$

نشان دهید

(آ) عملگر A خودالحاق است اگروفقط‌اگر $W(A) \subseteq \mathbb{R}$.

(ب) $\operatorname{co}(\operatorname{sp}(A)) \subseteq \overline{W(A)}$، و اگر A نرمال باشد آن‌گاه $\operatorname{co}(\operatorname{sp}(A)) = \overline{W(A)}$.

(ج) $\frac{۱}{۲}\|A\| \leq w(A) \leq \|A\|$، و در نتیجه $w(A)$ یک نرم معادل با $\|A\|$ است.

(د) $r(A) \leq w(A) \leq \|A\|$، و اگر A نرمال باشد آن‌گاه $r(A)=w(A)=\|A\|$.

(هـ) اگر $R(A) \perp R(A^*)$، بالاخص اگر $A^{۲}=۰$، آن‌گاه $w(A)=\frac{۱}{۲}\|A\|$.

(و) $w(A)=\sup_{\theta\in\mathbb{R}}\left\|\operatorname{Re}(e^{i\theta}A)\right\|$.

۱۶.۰ فرض کنیم $A, B \in \mathbf{B}(\mathcal{H})$. نشان دهید

(آ) $w(A^n) \leq w(A)^n$ برای هر $n=۰, ۱, ۲, \cdots$.

(ب) $w(AB) \leq ۴w(A)w(B)$، و اگر $AB = BA$، آن‌گاه

$$w(AB) \leq ۲w(A)w(B)\,.$$

(ج) اگر A نرمال و $AB = BA$، آن‌گاه $w(AB) \leq w(A)w(B)$.

(د) اگر $AB = BA$ و $A^*B = BA^*$، آن‌گاه $\|w(AB) \leq \|A\|w(B)$.

۱۷.۰ فرض کنیم $A \in \mathbf{B}(\mathcal{H})$. نشان دهید

(آ) برای هر $\lambda \notin \mathrm{sp}(A)$ و $\mu \notin \overline{W(A)}$،

$$\frac{۱}{d(\lambda, \mathrm{sp}(A))} \leq \left\|(A - \lambda I_{\mathcal{H}})^{-۱}\right\| \leq \frac{۱}{d(\mu, \overline{w(A)})}\,.$$

(ب) اگر A نرمال باشد آن‌گاه

$$\|(A - \lambda I_{\mathcal{H}})x\| \geq d(\lambda, \mathrm{sp}(A))\,, \quad (\lambda \notin \mathrm{sp}(A)\,,\ x \in \mathcal{H}\,,\ \|x\| = ۱)\,.$$

۱۸.۰ فرض کنیم $A \in \mathbf{B}(\mathcal{H})$. نشان دهید

(آ) اگر A وارون‌پذیر، $۱ \leq \|A\|$ و $۱ \leq \|A^{-۱}\|$، آن‌گاه A یک عملگر یکانی است.

(ب) اگر A خودتوان و $w(A) \leq ۱$، آن‌گاه A یک عمگر تصویر است.

۱۹.۰ فرض کنیم $A = [A_{ij}]_{n\times n}$ یک ماتریس عملگری بر $\mathcal{H} = \mathcal{H}_۱ \oplus \cdots \oplus \mathcal{H}_n$ بوده و $\tilde{A} = [\|A_{ij}\|]_{n\times n}$ که در آن $A_{ij} \in \mathbf{B}(\mathcal{H}_j, \mathcal{H}_i)$ $(i, j = ۱, \cdots n)$. نشان دهید

(آ) $w(A) \leq w(\tilde{A})$.

(ب) $\|A\| \leq \|\tilde{A}\|$.

(ج) $r(A) \leq r(\tilde{A})$.

۲۰.۰ فرض کنیم $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ و $B = [b_{ij}] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. اگر به ازای هر $i, j = ۱, \cdots n$ داشته باشیم $۰ \leq a_{ij} \leq b_{ij}$، نشان دهید $\|A\| \leq \|B\|$.

۲۱.۰ اگر $\mathbf{B}(\mathcal{H} \oplus \cdots \oplus \mathcal{H}) \ni \tilde{A} = \begin{pmatrix} A_۱ & ۰ & \cdots & ۰ \\ ۰ & A_۲ & \cdots & ۰ \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ۰ & ۰ & \cdots & A_n \end{pmatrix}$، نشان دهید

(آ) $\mathrm{sp}(\tilde{A}) = \bigcup_{i=۱}^{n} \mathrm{sp}(A_i)$.

(ب) $W(\tilde{A}) = \bigcup_{i=1}^{n} \operatorname{co}(W(A_i))$.

(ج) $\|\tilde{A}\| = \max(\|A_1\|, \cdots, \|A_n\|)$.

(د) $w(\tilde{A}) = \max(w(A_1), \cdots, w(A_n))$.

(ه) برای هر تابع پیوسته f بر $\operatorname{sp}(\tilde{A})$،

$$f(\tilde{A}) = \begin{pmatrix} f(A_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & f(A_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & f(A_n) \end{pmatrix}.$$

۲۲.۰ فرض کنیم $A \in \mathbf{B}(\mathcal{H})$. نشان دهید

(آ) $\|A + A^*\| \leq 2w(A)$.

(ب) $w(A) \leq \frac{1}{2}\big\||A| + |A^*|\big\| \left(\leq \frac{1}{2}\left(\|A\| + \|A^2\|^{1/2}\right) \leq \|A\| \right)$.

۲۳.۰ فرض کنیم $A, B \in \mathbf{B}(\mathcal{H})$. نشان دهید

$$w(A+B) \leq \sqrt{w^2(A) + w^2(B) + \|A\|\|B\| + w(B^*A)}\,.$$

(راهنمایی: از نامساوی بوزانو استفاده کنید.)