دانشگاه زنجان

حل معادلات زمان کسری دو بعدی با یک روش شبه طیفی
Solving 2D time- fractional diffusion equations by a pseudospectral method

ارائه دهنده : سهیلا میرزائی

استاد راهنما : دکتر علی شکری

۱۶بهمن ۱۳۹۵

۱ Definition

این یک تعریف است.

فهرست مطالب

فصل اول

تعاریف و مفاهیم اولیه

۲ Definition

درونیابی:یک تقریب درونیابی برای تابع $f(x)$ ، یک عبارت $P_{N-۱}(x)$ می‌باشد که درجه چندجمله‌ای با $f(x)$ در هر یک از N نقطه درونیاب تعیین می‌شود

$$P_{N-۱}(x_i) = f(x_i) \quad i = ۱, ۲, \ldots, N$$

درونیابی لاگرانژ

درونیابی خطی

$$P(x) \approx \frac{(x-x_1)}{(x_0-x_1)}f(x_0)+\frac{(x-x_0)}{(x_1-x_0)}f(x_1)$$

- معادله خط برای دو نقطه x_0 و x_1
- منحصربفردی

$$P_1(x_1)=f(x_1), \qquad P_1(x_0)=f(x_0)$$

$$P_۲(x_۰) = f(x_۰), \qquad P_۲(x_۱) = f(x_۱), \qquad P_۲(x_۲) = f(x_۲)$$

$$P_۲(x) \equiv \frac{(x - x_۱)(x - x_۲)}{(x_۰ - x_۱)(x_۰ - x_۲)} f(x_۰) + \frac{(x - x_۰)(x - x_۲)}{(x_۱ - x_۰)(x_۱ - x_۲)} f(x_۱) + \frac{(x - x_۰)(x - x_۱)}{(x_۲ - x_۰)(x_۲ - x_۱)} f(x_۲)$$

در حالت کلی برای $N+۱$ نقطه یک چندجمله‌ای از درجه N به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$P_N(x) = \sum_{i=\circ}^{N} f(x_i) C_i(x)$$

- چندجمله‌ای‌های از درجه N
- C_i ها توابع اصلی (ضربگرهای لاگرانژ)

$$C_i(x) = \prod_{j=\circ, i\neq j}^{N} \frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)}$$

درونیابی لاگرانژ

خاصیت دلتای کرونکر برقرار است:

$$C_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} ۱ & i = j \\ ۰ & i \neq j \end{cases}$$

چندجمله ای چبیشف

فرض کنید n عدد صحیح مثبت، $n+۱$ نقطه متمایز چبیشف به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$x_j = \cos(\frac{j\pi}{n}), \quad j = ۰, ۱, \ldots, n,$$

که نقاط حدی مرتبه n ام چندجمله‌ای چبیشف $Tn(x) = \cos(n \cos^{-۱} x)$ می‌باشند.

فصل دوم

حسابان کسری

مشتق و انتگرال کسری به عنوان تعمیمی از مشتق و انتگرال مرتبه صحیح می‌باشد

- ۱۶۹۵–لایبنیتز
- ۱۷۳۰–اویلر
- ۱۷۷۲–لاگرانژ
- ۱۸۱۲–لاپلاس
- ۱۸۲۲–فوریه
- ۱۸۳۲–لیوویل(*)
- ۱۸۴۷–ریمان(*)
- ۱۸۶۷–گرونوالد(*)
- (۱۸۶۷–۱۸۷۲) لتنیکوف(*)
- ۱۹۱۷–ویل
- ۱۹۶۷–کاپوتو(*)

نماد مشتق کسری (دیویس)

$${}_aD_t^{\alpha} f(t)$$

زیرنویس‌های a و t حدود مربوط به عملیات مشتق کسری (حد پایین و بالای مشتق‌گیری)

تابع گامای اویلر

$$\Gamma(z) = \int_{۰}^{\infty} e^{-t} t^{z-۱} dt, \quad z \in \mathbb{C}$$

خواص تابع گاما:

۱. مهم ترین خاصیت تابع گاما

$$\Gamma(z) = z\Gamma(z) \qquad (۱)$$

۲. برای هر عدد طبیعی n داریم:

$$\Gamma(۱ + n) = n!$$

خواص تابع گاما:

۱. مهم ترین خاصیت تابع گاما

$$\Gamma(z) = z\Gamma(z) \qquad (۱)$$

۲. برای هر عدد طبیعی n داریم:

$$\Gamma(۱+n) = n!$$

۳. تابع گاما همواره مخالف صفر است

۴. نمایش حدی تابع گاما

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n!n^z}{z(z+۱)(z+۲)\dots(z+n)}, \qquad z \neq ۰, -۱, -۲, \dots.$$

۵. برای هر عدد غیرصحیح z داریم:

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}.$$

۶. فرمول لاگرانژ

$$\Gamma(z)\Gamma(z+\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}\,2^{2z-1}\Gamma(2z). \quad z \neq 0, \frac{-1}{2}, -1, \ldots. \tag{2}$$

با قرار دادن $z = n + \frac{1}{2}$ (nعدد صحیح) در رابطه(۲)

$$\Gamma(z+\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}(2n)!}{2^{2n}n!}. \tag{3}$$

با قرار دادن $n = 0$ در رابطه(۱)

$$\Gamma(\frac{-1}{2}) = -2\Gamma(\frac{1}{2}) = -2\sqrt{\pi}.$$

تابع میتاگ- لفلر

- جواب‌های تحلیلی معادلات دیفرانسیل با مشتق کسری
- تعمیم تابع نمایی
- به عنوان تابع ویژه یک معادله دیفرانسیل مرتبه کسری

تابع میتاگ- لفلر

- جواب‌های تحلیلی معادلات دیفرانسیل با مشتق کسری
- تعمیم تابع نمایی
- به عنوان تابع ویژه یک معادله دیفرانسیل مرتبه کسری

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=۰}^{+\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + ۱)}. \quad \alpha > ۰$$

(آگاروال) تابع میتاگ–لفلر دو پارامتری

$$E_{\alpha,\beta}(z)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)}, \qquad (\alpha>0, \quad \beta>0).$$

تابع میتاگ-لفلر چند متغیره

$$E_{(\alpha_1,\dots,\alpha_m),\beta}(z_1,\dots,z_m)=\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{l_1+\dots+l_m=k}\frac{(k;l_1,\dots,l_m)\prod_{i=1}^{m}z_i^{l_i}}{\Gamma(\beta+\sum_{i=1}^{m}\alpha_i l_i)},$$

$l_1>0,\dots,l_m>0$

که در آن $(k;l_1,\dots,l_m)$ ضرایب چندجمله‌ای هستند و داریم:

$$(k;l_1,\dots,l_m)=\binom{k}{l_1,\dots,l_m}=\frac{k!}{(l_1)!(l_2)!\dots(l_m)!},\quad m\in\mathbb{N}.$$

خواص تابع میتاگ-لفلر:

۱. $|z| < ۱$تابع میتاگ-لفلر دو پارامتری

$$\int_{۰}^{\infty} e^{-t} t^{\beta-۱} E_{\alpha,\beta}(t^{\alpha} z)dt = \frac{۱}{۱-z}.$$

۲. برخی مقادیر خاص α, β ، تابع میتاگ-لفلر

$$E_{\alpha,۱}(z) = \sum_{k=۰}^{+\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + ۱)} \equiv E_{\alpha}(z),$$

$$E_{۱,۱}(z) = \sum_{k=۰}^{+\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k + ۱)} = e^z,$$

$$E_{۱,۲}(z) = \sum_{k=۰}^{+\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k + ۲)} = \frac{e^z - ۱}{z},$$

$$E_{۱,m}(z) = \frac{۱}{z^{m-۱}} \left\{ e^z - \sum_{k=۰}^{m-۲} \frac{z^k}{k!} \right\}.$$

تعریف

مشتق معمولی تابع $f(x)$ از مرتبه n

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n f}{dt^n} = \lim_{h\to ۰} \frac{۱}{h^n} \sum_{r=۰}^{n} (-۱)^r \binom{n}{r} f(t - rh),$$

که در آن

$$\binom{n}{r} = \frac{n(n-۱)(n-۲)\dots(n-r+۱)}{r!}.$$

تعریف مشتق کسری ریمان-لیوویل

$$ {}_aD_t^p f(t) = \left(\frac{d}{dt}\right)^{m+۱} \int_a^t (t-s)^{m-p} f(s)ds, \quad (m \le p < m+۱). \tag{۴} $$

خواص مشتق کسری ریمان لیوویل

⊛ اتحاد میان مشتق از مرتبه صحیح و انتگرال

$$f^{(k-n)}(t) = \frac{1}{\Gamma(n)} D^k \int_a^t (t-s)^{n-1} f(s)ds,$$

- $n(n \geq 1)$ ثابت، نماد D^k به معنی k تا انتگرال
- $k \leq 0$ به معنی k تا مشتق
- $k > 0$ $(k = n-1, n-2, \ldots)$ انتگرال مکرر تابع $f(t)$
- $k = n$ تابع $f(t)$
- $k = n+1, n+2, \ldots$ مشتق تابع $f(t)$ از مرتبه $k-n = 1, 2, \ldots$

⊛ انتگرال از مرتبه دلخواه(تضمین وجود انتگرال $p > ۰$)

$$ {}_aD_t^{-p} f(t) = \frac{۱}{\Gamma(p)} \int_a^t (t-s)^{p-۱} f(s) ds, p > ۰ \qquad (۵) $$

اگر $f(t)$ برای $t \geq a$ پیوسته باشد، دراین‌صورت انتگرال از مرتبه حقیقی دلخواه تعریف شده(۵) دارای خاصیت زیر است:

$$ {}_aD_t^{-p}({}_aD_t^{-q} f(t)) = {}_aD_t^{-q}({}_aD_t^{-p} f(t)) = {}_aD_t^{-p-q} f(t). $$

⊛ مشتق از مرتبه دلخواه

$$ {}_aD_t^p f(t) = \frac{1}{\Gamma(k-p)} \frac{d^k}{dt^k} \int_a^t (t-s)^{k-p-1} f(s)ds, \quad (k-1 \le p < k). \tag{6} $$

$$ {}_aD_t^p f(t) = \frac{d^k}{dt^k}\left({}_aD_t^{-(k-p)} f(t)\right), \quad (k-1 \le p < k). $$

$p = k \ge 1$ و $t > a$ داریم:

$$ {}_aD_t^p f(t) = f^{(k)}(t), $$

برای $t > a$ مشتق کسری ریمان-لیوویل از مرتبه $p = k > 1$ با مشتق معمولی از مرتبه k برابر است. همچنین با قرار دادن $k = 1$ داریم:

$$ {}_aD_t^p f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-p)} \frac{d}{dt} \int_a^t (t-s)^{-p} f(s)ds, \quad (0 \le p < 1). \tag{7} $$

مشتق کسری کاپوتو

$$ {}_{a}^{C}D_{t}^{\alpha}f(t)=\frac{۱}{\Gamma(\alpha-n)}\int_{a}^{t}\frac{f^{(n)}(s)ds}{(t-s)^{\alpha+۱-n}},\quad (n-۱<\alpha<n). \tag{۸} $$

مشتق کسری کاپوتو

$$ {}_a^C D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha - n)} \int_a^t \frac{f^{(n)}(s)ds}{(t-s)^{\alpha+1-n}}, \quad (n-1<\alpha<n). \qquad (8) $$

ارتباط مشتق کسری ریمان-لیوویل و مشتق کسری کاپوتو

$$ {}_a D_t^\alpha f(t) = \frac{f(0)}{t^\alpha \Gamma(n-\alpha)} + {}_a^C D_t^\alpha f(t). $$

معادله زمان کسری

$$\partial_t^\alpha u(\mathbf{x},t) = \Delta u(\mathbf{x},t) + f(\mathbf{x},t), \qquad (\mathbf{x},t) \in \Omega \times (\circ, T),$$
$$ic: u(\mathbf{x},\circ) = u_\circ(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega$$
$$bc: u(\mathbf{x},t) = \circ, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega$$

معادله زمان کسری

$$\partial_t^\alpha u(\mathbf{x},t) = \Delta u(\mathbf{x},t) + f(\mathbf{x},t), \qquad (\mathbf{x},t) \in \Omega \times (\circ, T),$$
$$ic : u(\mathbf{x},\circ) = u_\circ(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega$$
$$bc : u(\mathbf{x},t) = \circ, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega$$

- Δ : عملگر لاپلاس
- ∂_t^α: مشتق کسری مرتبه α $(\circ < \alpha < ۱)$
- $f \in \Omega \times (\circ, T)$

حل تحلیلی معادله زمان کسری

- روش جداسازی متغیرها

$$\frac{D_t^\alpha T(t)}{T(t)} = \frac{-L(X)}{X(x)} = -\lambda, \Longrightarrow$$

$$(D_t^\alpha T)(t) = -\lambda T(t)$$

$$L(X) = \lambda X \quad (\star)$$

$$T_i(t) = C_i E_\alpha(-\lambda_i t^\alpha)$$

$$u_k(x,t) = \sum_{i=۱}^{k} C_i E_\alpha(-\lambda_i t^\alpha) X_i(x) \quad k = ۱, ۲, \ldots \Longrightarrow$$

$$u(\mathbf{x},t) = \sum_{k=۱}^{\infty} (u_۰, X_k) E_{\alpha,۱}(\lambda_k t^\alpha) X_k(\mathbf{x})$$

فصل سوم

معرفی روش شبه طیفی

برخی از روش‌های عددی برای حل $PDEs$

- روش‌های تفاضلات متناهی(Finite difference methods)
- روش‌های المان محدود (Finite element methods)
- روش‌های طیفی(روش‌های شبه طیفی) (Spectral methods)
- روش‌های المان مرزی (Boundary element methods)
- روش‌های توابع پایه‌ای شعاعی و روش‌های بدون شبکه
  (Radial basis methods and Meshless methods)
- روش‌های نیمه گسسته (Semi-discretization methods)
- روش‌های تجزیه دامنه (Domain decomposition methods)

- ۱۹۴۴-بیلنوا(مطرح)
- ۱۹۵۴-سیلبرمن و ویوچالی (اجرا)
- (۱۹۶۹-۱۹۷۰)-اوزاگ و الیاسون
- ۱۹۷۰-ماچن هورس(برنامه‌های کاربردی)
- ۱۹۷۷-گتلیب و اوزاگ(مبنای اصلی ریاضی)
- ۱۹۹۰-(جریان محاسبات)

فرم کلی معادله دیفرانسیل(فرم قوی)

$$\begin{cases} Lu &= f \quad \Omega \\ Bu &= g \quad \partial\Omega^* \end{cases}$$

فرم کلی معادله دیفرانسیل(فرم قوی)

$$\begin{cases} Lu &= f \quad \Omega \\ Bu &= g \quad \partial\Omega^* \end{cases}$$

- Ω نشان دهنده دامنه کرانداری در $\mathbb{R}^d, d = ۲, ۳$
- $\partial\Omega$ مرز
- f تابع
- u مجهول
- L عملگر دیفرانسیل خطی
- B عملگر مرزی
- $\partial\Omega^* \subset \partial\Omega$

روش شبه طیفی

- دامنه کرانداری $d = ۲, ۳, \Omega = [-۱, ۱]^d$
- بازه را به N زیر بازه افراز $\Longleftarrow (N+۱)^d$ نقطه هم‌مکانی
- $\mathbb{P}_N$ را فضای همه چندجمله‌ای‌های از درجه کمتر یا مساوی N
- جواب هم‌مکانی طیفی $u_N \in \mathbb{P}_N$
-

$$\begin{cases} L_N u_N &= f \quad x_i \in \overline{\Omega} - \partial\Omega^* \\ B_N u_N &= g \quad x_i \in \partial\Omega^* \end{cases} \tag{۹}$$

- L_N (مشتق شبه طیفی) تقریبی از L
- فرم ضعیف روش هم‌مکانی طیفی

$$Find \quad u_N \in V_N; \quad a_N(u_N, v_N) = f_N(v_N) \quad \forall v_N \in V_N.$$

- L_N (مشتق شبه طیفی) تقریبی از L
- فرم ضعیف روش هم‌مکانی طیفی

$$Find \quad u_N \in V_N; \quad a_N(u_N, v_N) = f_N(v_N) \quad \forall v_N \in V_N.$$

- **تابع تریال:**چند جمله‌ایهای لاگرانژ
- **تابع تست:**تابع دلتای کرونکر

اعمال تابع تریال

$$u_N(x) = \sum_{j=1}^{(N+1)^d} C_j \psi_j(x); \quad C_j = u_N(x_j)$$

$$L_N u_N = f \Rightarrow$$

$$L_N \sum_{j=1}^{(N+1)^d} C_j \psi_j(x_i) = \sum_{j=1}^{(N+1)^d} (L_N \psi_j)(x_i) C_j = f(x_i)$$

$$x_i \in \overline{\Omega} \backslash \partial\Omega^*$$

$$\sum_{j=1}^{(N+1)^d} (B_N \psi_j)(x_i) C_j = g(x_i) \quad x_i \in \partial\Omega^*$$

مراحلی که در این روش‌ها باید انجام داد عبارتند از:

- ⋆ انتخاب توابع پایه‌ای $\{\psi_j(x)\}$
- ⋆ مجهول‌ها C_j
- ⋆ نحوه حل مسئله

$$U_a \simeq \sum_{j=۱}^{(N+۱)^d} C_j \psi_j(x)$$

مراحلی که در این روش‌ها باید انجام داد عبارتند از:

- ⋆ انتخاب توابع پایه‌ای $\{\psi_j(x)\}$
- ⋆ مجهول‌ها C_j
- ⋆ نحوه حل مسئله

$$U_a \simeq \sum_{j=۱}^{(N+۱)^d} C_j \psi_j(x)$$

- ⋆ اگر L یک عملگر باشد دراینصورت: $R(x; c_۰, c_۱, \ldots, c_N) = LU_a - f$
- ⋆ محاسبه باقی‌مانده R مطلوب ما $C_j \Longleftarrow R = ۰$
- ⋆ دخالت دادن تابع وزن $w(x)$

ضرب داخلی $\langle R, w_j \rangle$:

$$\langle R, w_j \rangle = \int R w_j dx$$

$\int R w_j dx = 0$ ، R را مجبور به صفر شدن می‌کنیم.

$$w_j = \delta(x - x_j) = \begin{cases} 1 & x = x_j \\ 0 & x \neq x_j \end{cases}$$

روش حاصل همان روش شبه طیفی خواهد بود.

ماتریس مشتق

- در نظر گرفتن نقاط چبیشف
- تعریف تابع شبکه‌ای u در نقاط چبیشف
- محاسبه مشتق گسسته w
  - p چندجمله‌ای منحصربفرد از $n \leq$ درجه با $p(x_j) = u_j, \quad 0 \leq j < n$
  - $w_j = p'(x_j)$

$$\Longrightarrow w = D_n u.$$

مثال ۱

$n = ۱ \Leftarrow$ نقاط درونیابی $x_۰ = ۱, x_۱ = -۱ \Leftarrow$ چندجمله‌ای درونیاب بین $\ell_۰, \ell_۱ \Downarrow$

$$p(x) = \frac{۱}{۲}(۱+x)\ell_۰ + \frac{۱}{۲}(۱-x)\ell_۱.$$

با مشتق‌گیری داریم:

$$p'(x) = \frac{۱}{۲}\ell_۰ - \frac{۱}{۲}\ell_۱. \Longrightarrow$$

$D_۱$ ماتریس ۲×۲

$$D_۱ = \begin{pmatrix} \frac{۱}{۲} & -\frac{۱}{۲} \\ \frac{۱}{۲} & -\frac{۱}{۲} \end{pmatrix}.$$

مثال ۲

$n = ۲ \Leftarrow$ نقاط درونیابی $x_۰ = ۱, x_۱ = ۰, x_۲ = -۱ \Leftarrow$ چندجمله‌ای درونیاب بین

$$p(x) = \frac{۱}{۲}x(۱+x)\ell_۰ + (۱+x)(۱-x)\ell_۱ + \frac{۱}{۲}x(x-۱)\ell_۲.$$

با مشتق‌گیری داریم:

$$p'(x) = (x+\frac{۱}{۲})\ell_۰ - \frac{۱}{۲}x\ell_۱ + (x=\frac{۱}{۲})\ell_۲.$$

$D_۲$ ماتریسی ۳×۳

$$D_۲ = \begin{pmatrix} \frac{۳}{۲} & -۲ & \frac{۱}{۲} \\ \frac{۱}{۲} & ۰ & -\frac{۱}{۲} \\ -\frac{۱}{۲} & ۲ & -\frac{۳}{۲} \end{pmatrix}$$

محاسبات ستون اول:

$$p'(x_0 = 1) = (1 + \frac{1}{2})\ell_0 = \frac{3}{2}\ell_0$$

$$p'(x_1 = 0) = \frac{1}{2}\ell_0$$

$$p'(x_2 = -1) = (-1 + \frac{1}{2})\ell_0 = -\frac{1}{2}\ell_0$$

فرمول کلی محاسبه عناصر ماتریس مشتق:
عناصر غیر قطر:

$$[D_n]_{kj} = \ell'_j(x_k) = \frac{\lambda_j}{\lambda_k(x_k - x_j)}, \quad k \neq j.$$

عناصر روی قطر اصلی:

$$[D_n]_{kk} = \sum_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{n} [D_n]_{kj}, \quad k = 0, 1, \ldots, n,$$

$$\lambda_j^{-1} = \prod_{k\neq j}^{n} (x_j - x_k)$$

عناصر ماتریس مشتق مرتبه p:

$$\big[D_n^{(p)}\big]_{ij} = \ell_j^{(p)}(x_i), \quad i,j = ۰,۱,\ldots,n,$$

فرمول بازگشتی محاسبه عناصر ماتریس مشتق:

$$\big[D_n^{(p)}\big]_{kj} = \frac{p}{x_k - x_j}\Big(\frac{\lambda_j}{\lambda_k}\big[D_n^{(p-۱)}\big]_{kk} - \big[D_n^{(p-۱)}\big]_{kj}\Big), k \neq j$$

- دامنه کرانداری $\Omega = (-۱, ۱)^۲$
- نقاط چبیشف

$$\mathbf{x}_{ij} = (\cos(i\pi/n), \cos(j\pi/n)), \quad i, j = ۰, ۱, \dots, n.$$

- چندجمله‌ای‌های لاگرانژ برای $\mathbf{x}_{ij}$ که $\ell_{ij}(\mathbf{x}_{ij}) = \delta_{ij}$

$$\ell_{ij}(\mathbf{x}) = \ell_i(x)\ell_j(y), \quad i, j = ۰, \dots, n,$$
$$\partial_x^۲ \ell_{ij}(\mathbf{x}_{rs}) = \ell_i''(x_r)\ell_j(y_s) = [D_n^۲]_{ri}\delta_{js},$$
$$\partial_y^۲ \ell_{ij}(\mathbf{x}_{rs}) = \ell_i(x_r)\ell_j''(y_s) = \delta_{ri}[D_n^۲]_{sj},$$

- $$\Delta\ell_{ij}(\mathbf{x}_{rs}) = [D_n^{۲}]_{ri}\delta_{js} + \delta_{ri}[D_n^{۲}]_{sj}, \quad r, s = ۰, ۱, \ldots, n.$$

- $$L_n = I_n \otimes D_n^{۲} + D_n^{۲} \otimes I_n, \quad (۲D),$$

- $$L_n = I_n \otimes I_n \otimes D_n^{۲} + I_n \otimes D_n^{۲} \otimes I_n + D_n^{۲} \otimes I_n \otimes I_n, \quad (۳D),$$

مسئله دیریکله مرتبه دو

$$\Delta u(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}), \quad x \in \Omega$$

$$u(\mathbf{x}) = 0, \quad x \in \partial\Omega,$$

$$U(\mathbf{x}) = \sum_{i,j=1}^{n-1} u_{ij}\ell_{ij}(\mathbf{x}), \quad u_{ij} := u(\mathbf{x}_{ij})$$ تقریبی از u

$$F(\mathbf{x}) = \sum_{i,j=1}^{n-1} f_{ij}\ell_{ij}(\mathbf{x}). \quad f_{ij} := f(\mathbf{x}_{ij})$$ تابع جریمه

شرایط مرزی. $u_{0,j} = u_{n,j} = u_{i,0} = u_{i,n} = 0, \quad i, j = 0, 1, \ldots, n$

برای یافتن معادلات برای مقادیر نقاط شبکه u_{ij} به تابع باقی‌مانده به‌صورت زیر نیاز داریم

$$R_n(\mathbf{x}) := \Delta U(\mathbf{x}) - F(\mathbf{x})$$

$$R_n(\mathbf{x}_{rs}) = ۰ \quad r, s = ۱, \ldots, n-۱$$

$$\Delta \sum_{i,j=۱}^{n-۱} u_{ij}\ell_{ij}(\mathbf{x}_{rs}) = \sum_{i,j=۱}^{n-۱} \Delta\ell_{ij}(\mathbf{x}_{rs})u_{ij} =$$

$$\sum_{i,j=۱}^{n-۱} \left([D_n^۲]_{ri}\delta_{js} + \delta_{ri}[D_n^۲]_{sj}\right)u_{ij} = f_{rs}, \quad r, s = ۰, ۱, \ldots, n-۱.$$

$\mathbf{U}$ و $\mathbf{F}$ به‌ترتیب بردارهای N بعدی مجهولات و مقادیر سمت راست $\Longleftarrow$ یک دستگاه معادلات خطی

$$(\tilde{I}_n \otimes \tilde{D}_n^{۲} + \tilde{D}_n^{۲} \otimes \tilde{I}_n)\mathbf{U} = \mathbf{F},$$

- $\tilde{D}_n^{۲}$ ماتریس $(n-۱) \times (n-۱)$ که با حذف سطرها و ستون‌های اول و آخر $D_n^{۲}$ حاصل شده

$\mathbf{U}$ و $\mathbf{F}$ به‌ترتیب بردارهای N بعدی مجهولات و مقادیر سمت راست $\Longleftarrow$ یک دستگاه معادلات خطی

$$(\tilde{I}_n \otimes \tilde{D}_n^{۲} + \tilde{D}_n^{۲} \otimes \tilde{I}_n)\mathbf{U} = \mathbf{F},$$

- $\tilde{D}_n^{۲}$ ماتریس $(n-۱)\times(n-۱)$ که با حذف سطرها و ستون‌های اول و آخر $D_n^{۲}$ حاصل شده
- $\tilde{I}_n$ ماتریس همانی $(n-۱)\times(n-۱)$
- ماتریس ضرایب $\tilde{L}_n$ از لاپلاسین گسسته L_n با حذف سطرها و ستون‌های مربوط به ضرایب u_{ij}

$$\tilde{L}_n = \tilde{I}_n \otimes \tilde{D}_n^{۲} + \tilde{D}_n^{۲} \otimes \tilde{I}_n,$$

فصل چهارم

معادلات زمان کسری نیمه گسسته

انواع روش‌ها برای حل معادلات وابسته به زمان:

- روش تفاضلات متناهی
- روش خطوط
- توابع پایه‌ای چند بعدی (زمان را به عنوان یک بعد درنظر می‌گیرد)

$$\partial_t^\alpha u(\mathbf{x},t) = \Delta u(\mathbf{x},t) + f(\mathbf{x},t), \qquad (\mathbf{x},t) \in \Omega \times (\circ, T),$$
$$ic : u(\mathbf{x},\circ) = u_\circ(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega$$
$$bc : u(\mathbf{x},t) = \circ, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega$$

$$u_n(\mathbf{x},t) = \sum_{i,j=۱}^{n-۱} u_{ij}\ell_{ij}(\mathbf{x}), \quad u_{ij} := u(\mathbf{x}_{ij},t)$$
$$f_n(\mathbf{x},t) = \sum_{i,j=۱}^{n-۱} f_{ij}\ell_{ij}(\mathbf{x}). \quad f_{ij} := f(\mathbf{x}_{ij},t)$$
$$R_n(\mathbf{x},t) := \partial_t^\alpha u_n(\mathbf{x},t) - \Delta u_n(\mathbf{x},t) - f(\mathbf{x},t)$$

$$
{}^{C}_{0}D_t^{\alpha} u_{rs}(t) = \sum_{i,j=1}^{n-1} \left([D_n^{2}]_{ri}\delta_{js} + \delta_{ri}[D_n^{2}]_{sj} \right) u_{ij} = f_{rs},
$$

$$
r, s = 0, 1, \ldots, n-1.
$$

$$
\begin{cases}
{}^{C}_{0}D_t^{\alpha}\mathbf{U}_n(t) = \tilde{L}_n\mathbf{U}_n(t) + \mathbf{F}_n(t) \\
\mathbf{U}_n(0) = \mathbf{U}_{n,0},
\end{cases}
$$

مراجع I

- Boyd JP.Chebyshev and Fourier Spectral Methods2th edn. Dover: New York, 2001. 1
- Trefethen LN.Spectral Methods in Matlab. SIAM: Philadelphia, PA, 2000. 2
- Garrappa R. A family of Adams exponential integrators for fractional linear systems.Computers Mathematics with Applications2013;66(5):717–727. 3
- Diethelm K.The Analysis of Fractional Differential Equations. Springer: Berlin, 2010. 4

مراجع II

Dehghan M, Shamsi M. Numerical solution of two-dimensional parabolic equation subject to nonstandard boundary specifications using the pseudospectral Legendre method.Numerical Methods for Partial Differential Equations2006;22(6):1255–1266. 5


باتشکر از حوصله و حسن توجه شما