مبانی آنالیز ریاضی

علی مرصّعی
عضو هیئت‌علمی دانشگاه زنجان

انتشارات دانشگاه زنجان
۱۳۹۸

فهرست مطالب

۱
فضاهای متری

مسائل

۱.۱ نشان دهید تابع $d(x,y)=\sqrt{|x-y|}$ یک متر روی $\mathbb{R}$ است.

۲.۱ فرض کنید X مجموعه همه توابع پیوسته از $[a,b]$ به $\mathbb{R}$ باشد. برای هر $x,y\in X$ تعریف کنید

$$d(x,y)=\max\left\{|x(t)-y(t)|\ :\ t\in[a,b]\right\}.$$

نشان دهید (X,d) یک فضای متری است.

۳.۱ فرض کنید X مجموعه همه توابع پیوسته از $[a,b]$ به $\mathbb{R}$ باشد. برای هر $x,y\in X$ تعریف کنید

$$d(x,y)=\int_a^b |x(t)-y(t)|\,dt\,.$$

نشان دهید (X,d) یک فضای متری است.

۴.۱ فرض کنید (X,d) یک فضای متری باشد. نشان دهید برای هر $x,y,z,w \in X$ داریم

$$\Big|d(x,z)-d(z,y)\Big| \leq d(x,y)$$

و

$$\Big|d(x,y)-d(z,w)\Big| \leq d(x,z)+d(y,w)\,.$$

۵.۱ فرض کنید (X,d) یک فضای متری باشد. تابع ρ را به‌صورت زیر در نظر بگیرید:

$$\rho(x,y) := \frac{d(x,y)}{۱+d(x,y)}\,, \qquad (x,y \in X)\,.$$

نشان دهید ρ یک متر روی X است.

(توجه کنید که متر ρ یک متر کراندار روی X است؛ زیرا برای هر $x,y \in X$، $\rho(x,y) < ۱$)

۶.۱ فرض کنید (X,d) یک فضای متری باشد. تابع δ را به‌صورت زیر در نظر بگیرید:

$$\delta(x,y) := \min\{۱, d(x,y)\}\,, \qquad (x,y \in X)\,.$$

نشان دهید δ یک متر کراندار روی X است.

۷.۱ نشان دهید در هر فضای متری X، شرط لازم و کافی برای اینکه $A \subseteq X$ باز باشد آن است که $A^\circ = A$. همچنین نشان دهید که A° بزرگترین مجموعه باز مشمول در A است.

۸.۱ فرض کنید (X,d) فضای متری، $x \in X$ و $۰ < r < s$ باشد. نشان دهید که $B(x;r) \subseteq B(x;s)$. همچنین نشان دهید که ممکن است $B(x;r) = B(x;s)$ حتی اگر $r < s$.

۹.۱ (خاصیت هاوسدورف[1]) فرض کنید x و y دو نقطه مجزا در فضای متری X باشد، نشان دهید که $r > ۰$ چنان موجود است که $B(x;r) \cap B(y;r) = \emptyset$.

۱۰.۱ نشان دهید که $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^۲ \;:\; xy \neq ۰\}$ در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^۲$ باز است.

[1]Hausdorff property

۱۱.۱ مجموعه نقاط حدی مجموعه‌های زیر را در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}$ مشخص کنید و سپس تعیین کنید که کدام‌یک از آنها باز و کدام‌یک بسته هستند.

(الف) $\mathbb{Z}$،

(ب) $A = \left\{ \frac{۱}{۲^n} + \frac{۱}{۵^m} \ : \ n, m \in \mathbb{N} \right\}$،

(ج) $B = \left\{ (-۱)^n + \frac{۱}{m} \ : \ n, m \in \mathbb{N} \right\}$،

(د) $C = \left\{ \frac{۱}{n} + \frac{۱}{m} \ : \ n, m \in \mathbb{N} \right\}$،

(هـ) $D = \left\{ \dfrac{(-۱)^n}{۱ + \frac{۱}{n}} \ : \ n \in \mathbb{N} \right\}$.

۱۲.۱ فضای اقلیدسی $\mathbb{R}$ را در نظر بگیرید و فرض کنید $A = (-۱, ۱) \cup (۱, ۲)$. به سوالات زیر با توضیح پاسخ دهید.

(الف) قطر A چه‌قدر است؟

(ب) آیا A باز است، بسته یا هیچ‌کدام؟

(ج) آیا $x = ۱$ نقطه حدی A است؟

(د) بستار A، $\overline{A}$ را به دست آورید.

(هـ) آیا A همبند است؟

۱۳.۱ فرض کنید E مجموعه‌ای در فضای متری X باشد.

(الف) ثابت کنید E° همیشه باز است.

(ب) هرگاه $G \subseteq E$ و G باز باشد، آنگاه ثابت کنید $G \subseteq E^\circ$.

(ج) ثابت کنید $(E^\circ)^c = \overline{E^c}$.

(د) آیا E° و $\overline{E}^\circ$ همیشه برابر هستند؟

(هـ) آیا $\overline{E}$ و $\overline{E^\circ}$ همواره برابر هستند؟

۱۴.۱ فرض کنید X یک فضای متری و $A, B \subseteq X$ باشند. نشان دهید که

(الف) $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$.

(ب) $(A \cup B)^\circ \supseteq A^\circ \cup B^\circ$. همچنین مثالی بیاورید که نشان دهد تساوی ممکن است برقرار نباشد.

۱۵.۱ فرض کنید X فضای متری و $A, B \subseteq X$. ثابت کنید:

(الف) A' در X بسته است، یعنی $(A')' \subseteq A'$.

(ب) هرگاه $A \subseteq B$، آنگاه $A' \subseteq B'$.

(ج) $(A \cup B)' = A' \cup B'$.

(د) $(A \cap B)' \subseteq A' \cap B'$.

(هـ) $(\overline{A})' = A'$.

۱۶.۱ هرگاه $A_۱, \cdots, A_n$ مجموعه‌هایی در یک فضای متری X باشند، نشان دهید که:

(الف) $\overline{(\cup_{i=۱}^n A_i)} = \cup_{i=۱}^n \overline{A_i}$.

(ب) $\overline{(\cap_{i=۱}^n A_i)} \subseteq \cap_{i=۱}^n \overline{A_i}$.

۱۷.۱ ثابت کنید اشتراک هر خانواده دلخواه از زیرمجموعه‌های فشرده فضای متری X، مجموعه‌ای فشرده است.

۱۸.۱ ثابت کنید اجتماع تعداد متناهی از زیرمجموعه‌های فشرده فضای متری X، فشرده است.

۱۹.۱ فرض کنید A زیرمجموعه‌ای از فضای متری X باشد. نقطه $x \in X$ را *نقطه مرزی* A می‌نامیم هرگاه برای هر $r > ۰$

$$B(x;r) \cap A \neq \emptyset \qquad \text{و} \qquad B(x;r) \cap A^c \neq \emptyset\,.$$

مجموعه همه نقاط مرزی A را با نماد ∂A نمایش می‌دهیم.

(الف) نقاط مرزی مجموعه‌های زیر را در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^۲$ مشخص کنید:

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^۲ \ : \ x^۲ + y^۲ \leq ۱\}\,,$$
$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^۲ \ : \ x^۲ + y^۲ < ۱\}\,,$$
$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^۲ \ : \ x^۲ + y^۲ = ۱\}\,.$$

(ب) ثابت کنید $\partial A = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}$ و نتیجه بگیرید که ∂A یک مجموعه بسته است.

(ج) $\partial A = \partial(X \setminus A)$.

(د) هرگاه $\overline{A} \cap \overline{B} = \emptyset$، آنگاه $\partial(A \cup B) = \partial A \cup \partial B$.

۲۰.۱ نشان دهید که یک فضای متری X همبند است اگروفقط‌اگر هر تابع پیوسته $f : X \longrightarrow \{\pm ۱\}$ یک تابع ثابت باشد.

۲۱.۱ برای هر $r > ۰$، نشان دهید که دایره $C_r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^۲ \ : \ x^۲ + y^۲ = r^۲\}$ همبند مسیری است.

۲۲.۱ نشان دهید که هذلولی $\{(x, y) \in \mathbb{R}^۲ \ : \ x^۲ - y^۲ = ۱\}$ همبند مسیری نیست.

۲۳.۱ فرض کنید X مجموعه ناتهی و d متر گسسته روی X باشد. نشان دهید

(الف) اگر $A \subseteq X$ باشد، آنگاه A هم باز و هم بسته است.

(ب) اگر $A \subseteq X$ فشرده است اگروفقط‌اگر A متناهی باشد.

(ج) تنها زیرمجموعه‌های همبند X تک عضوی هستند.

۲۴.۱ مجموعه $E \subseteq \mathbb{R}^n$ را محدب[1] نامیم هرگاه برای هر $x, y \in E$ و هر $\lambda \in [۰, ۱]$

$$\lambda x + (۱ - \lambda) y \in E \,.$$

ثابت کنید هر مجموعه محدب در $\mathbb{R}^n$ همبند است.

---

[1] convex set

۲
دنباله‌ها و سری‌های عددی

مسائل

۱.۲ فرض کنید $x \in \mathbb{R}$ چنان باشد که $|x| < ۱$. نشان دهید $\lim_{n\to\infty} x^n = ۰$.

۲.۲ فرض کنید $a > ۰$ باشد. ثابت کنید که دنباله $\{\sqrt[n]{a}\}$ به ۱ همگرا است.

۳.۲ فرض کنید $\{x_n\}$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی باشد که $\{x_{۲n}\}$، $\{x_{۲n+۱}\}$ و $\{x_{۳n}\}$ همگرا هستند. نشان دهید که $\{x_n\}$ همگرا است.

۴.۲ فرض کنید $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ دو دنباله حقیقی باشند به‌طوری‌که

(آ) برای هر $n \in \mathbb{N}$، $x_n \leq y_n$.

(ب) دنباله $\{x_n\}$ صعودی است.

(ج) دنباله $\{y_n\}$ نزولی است.

نشان دهید که دنباله‌های $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ همگرا هستند و

$$\lim_{n\to\infty} x_n \leq \lim_{n\to\infty} y_n\,.$$

۵.۲ نشان دهید که دنباله $x_n = ۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} + \cdots + \frac{۱}{n}$ همگرا نیست، ولی دنباله $y_n = ۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} + \cdots + \frac{۱}{n} - \ln(n)$ همگرا است.

۶.۲ نشان دهید که دنباله

$$x_n = \int_{۱}^{n} \frac{\cos t}{t^{۲}}\,\mathrm{d}t$$

یک دنباله کوشی است.

۷.۲ فرض کنید (X,d) یک فضای متری و $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ دو دنباله کوشی در X باشند. نشان دهید که دنباله $\{d(x_n,y_n)\}$ در $\mathbb{R}$ همگرا است.

۸.۲ نشان دهید که هر فضای متری گسسته، فضای کامل است.

۹.۲ با استفاده از میانگین چزارو، نشان دهید که اگر $\{x_n\}$ دنباله‌ای باشد که $\lim_{n\to\infty}(x_{n+۱} - x_n) = \ell$، آنگاه

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{n} = \ell\,.$$

۱۰.۲ فرض کنید $\{x_n\}$ دنباله‌ای یکنوا باشد. نشان دهید که $\{x_n\}$ همگرا است اگروفقط‌اگر دنباله دارای یک زیردنباله همگرا باشد.

۱۱.۲ فرض کنید برای هر $n \geq ۱$، $x_n > ۰$ باشد و

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+۱}}{x_n} = r < ۱\,.$$

نشان دهید که $\{x_n\}$ همگرا است.

۱۲.۲ قرار دهید $x_۱ = ۱$ و برای هر $n \geq ۲$

$$x_n = x_{n-۱} + \frac{۱}{x_{n+۱}}\,.$$

نشان دهید که $\{x_n\}$ واگرا است.

۱۳.۲ تعریف کنید $r_۱ = ۱$ و برای هر $n \geq ۲$

$$r_n = ۱ + \frac{۱}{r_{n-۱}} .$$

(الف) نشان دهید که اگر $\{r_n\}$ همگرا باشد، آنگاه باید به

$$\phi = \frac{۱ + \sqrt{۵}}{۲} ,$$

همگرا باشد، که این عدد، نسبت *طلایی*[1] نامیده می‌شود.

(ب) نشان دهید که برای هر $n \geq ۲$ داریم

$$|r_n - \phi| \leq \frac{۱}{\phi} |r_{n-۱} - \phi| .$$

(ج) نشان دهید که $\{r_n\}$ باید به ϕ همگرا باشد.

۱۴.۲ فرض کنید $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ دو دنباله دلخواه باشند. ثابت کنید

(الف) $\liminf_{n\to\infty}(x_n + y_n) \geq \liminf_{n\to\infty} x_n + \liminf_{n\to\infty} y_n$.

(ب) $\limsup_{n\to\infty}(x_n + y_n) \leq \limsup_{n\to\infty} x_n + \limsup_{n\to\infty} y_n$.

۱۵.۲ فرض کنید $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ دو دنباله دلخواه با جملات مثبت باشند. ثابت کنید

(الف) $\limsup_{n\to\infty}(x_n y_n) \leq \big(\limsup_{n\to\infty} x_n\big)\big(\limsup_{n\to\infty} y_n\big)$.

(ب) مثالی ارائه دهید که نامساوی بالا اکید باشد.

۱۶.۲ همگرایی سری‌های زیر را بررسی کنید:

(الف) $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۴n + ۱}{۳n^۳ - n^۲ - ۱}$

(ب) $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{n}{۲^n}$

(ج) $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{n^۲}$

(د) $\sum_{n=۱}^{\infty} (\sqrt{n + ۱} - \sqrt{n})$

(هـ) $\sum_{n=۱}^{\infty} \big(\sqrt[n]{n} - ۱\big)^n$

(و) $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{(۲n + ۱)^۳}$

(ز) $\sum_{n=۲}^{\infty} \frac{۱}{n \ln n}$

[1] golden ratio

(ح) $\sum_{n=۲}^{\infty} \dfrac{۱}{n(\ln n)^{۲}}$

(ط) $\sum_{n=۱}^{\infty} \dfrac{n^{۲}}{\mathrm{e}^{n}}$

(ی) $\sum_{n=۱}^{\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{۱/n}}{n^{۲}}$

۱۷.۲ هرگاه $x_n > ۰$، $n = ۱, ۲, \cdots$، آنگاه نشان دهید که

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{x_{n+۱}}{x_n} \le \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} \le \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} \le \limsup_{n\to\infty} \frac{x_{n+۱}}{x_n} .$$

نتیجه بگیرید که اگر $\lim_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+۱}}{x_n}$ موجود باشد، آنگاه $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n}$ نیز موجود و باهم برابر هستند. آیا حالت عکس این مطلب نیز برقرار است؟

۱۸.۲ نشان دهید که

(الف) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}} = \mathrm{e}$

(ب) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[n]{(n+۱)(n+۲)\cdots ۲n}}{n} = \dfrac{۴}{\mathrm{e}}$

۱۹.۲ ثابت کنید هرگاه $x_n \ge ۰$، همگرایی $\sum x_n$ همگرایی $\sum \dfrac{\sqrt{x_n}}{n}$ را ایجاب می‌کند.

۲۰.۲ ثابت کنید سری زیر واگرا است

$$\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n\left(۱+\frac{۱}{۲}+\cdots+\frac{۱}{n}\right)} .$$

۲۱.۲ فرض کنید $\{x_n\}$ دنباله‌ای نزولی و $\sum x_n$ همگرا باشد، ثابت کنید

$$\lim_{n\to\infty} n x_n = ۰ .$$

۳
پیوستگی

مسائل

۱.۳ ثابت کنید

$$\lim_{x\to ۰} \frac{۱}{۱+\mathrm{e}^{-\frac{۱}{x}}} = ۱\,.$$

۲.۳ نشان دهید که تابع دیریکله

$$D(x) = \begin{cases} ۱ & ; x \in \mathbb{Q} \\ ۰ & ; x \in \mathbb{Q}^c \end{cases}$$

در هیچ نقطه‌ای پیوسته نیست.

۳.۳ پیوستگی توابع یزر را در نقطه داده شده بررسی کنید:

(الف) $f(x) = x - |x|$ در $x = ۰$،

(ب) $f(x) = \begin{cases} x^m \sin\frac{۱}{x} & ; x \neq ۰,\ m > ۰ \\ ۰ & ; x = ۰ \end{cases}$، در $x = ۰$.

۴.۳ تابع $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ را به‌صورت زیر تعریف کنید

$$f(x)=\begin{cases}\frac{۱}{n} & ; x=\frac{m}{n}\,,\ \gcd(m,n)=۱\,,\\ ۰ & ; x\in\mathbb{Q}^c\,.\end{cases}$$

نشان دهید که f در هر نقطه گنگ پیوسته و در هر نقطه گویا ناپیوسته است.

۵.۳ تابع $p:\mathbb{R}^۲\longrightarrow\mathbb{R}$ را به‌صورت $p(x,y)=x$ در نظر بگیرید.

(الف) نشان دهید که p یک تابع پیوسته نسبت به متر اقلیدسی است.

(ب) $p^{-۱}(\{۰\})$ را به دست آورید. آیا این مجموعه باز است؟ بسته است؟ یا هیچ‌کدام؟

۶.۳ تابع $g:\mathbb{R}^۲\longrightarrow\mathbb{R}$ را به‌صورت زیر در نظر بگیرید

$$g(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^۲+y^۲} & ; (x,y)\neq(۰,۰)\,,\\ a & ; (x,y)=(۰,۰)\,,\end{cases}$$

که در آن a یک عدد حقیقی ثابت است. نشان دهید که تابع g در $(۰,۰)$ پیوسته نیست.

۷.۳ ثابت کنید که اگر c یک نقطه تنها برای مجموعه D باشد، آن‌گاه f در c پیوسته است.

۸.۳ فرض کنید $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ تابعی باشد که برای هر $x,y\in\mathbb{R}$،

$$f(x+y)=f(x)+f(y)\,.$$

نشان دهید که

(الف) برای هر $x\in\mathbb{R}$ و هر $n\in\mathbb{N}$، $f(nx)=nf(x)$.

(ب) f در یک نقطه پیوسته است اگروفقط‌اگر f روی $\mathbb{R}$ پیوسته باشد.

(ج) f پیوسته است اگروفقط‌اگر $m\in\mathbb{R}$ چنان موجود باشد که $f(x)=mx$.

۹.۳ فرض کنید (X,d) فضای متری باشد. نگاشت $f:X\longrightarrow\mathbb{R}$ را به‌صورت زیر تعریف کنید

$$f(x)=d(x,a)\,,$$

که در آن $a\in X$ یک نقطه ثابت است. نشان دهید که f روی X پیوسته است.

۱۰.۳ فرض کنید (X, d_X) و (Y, d_Y) دو فضای متری و $f : X \longrightarrow Y$ تابعی پیوسته باشد. نشان دهید که برای هر $A \subseteq X$،

$$f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}\,.$$

۱۱.۳ فرض کنید $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ تابعی با این خاصیت باشد که برای $M > 0$ ای،

$$|f(x)| \leq M|x|^2\,, \quad \forall x \in \mathbb{R}\,.$$

ثابت کنید که

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 0\,.$$

۱۲.۳ فرض کنید f تابع پیوسته‌ای روی $[a, b]$ باشد. اگر برای هر $x \in [a, b]$، $y \in [a, b]$ چنان موجود باشد که

$$|f(y)| \leq \frac{1}{2}|f(x)|\,,$$

آنگاه نشان دهید که $c \in [a, b]$ چنان موجود است که $f(c) = 0$.

۱۳.۳ فرض گنید f تابعی پیوسته روی $\mathbb{R}$ باشد و

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} f(x) = 0\,.$$

ثابت کنید f روی $\mathbb{R}$ کراندار است و ماکزیمم یا می‌نیمم خود را روی $\mathbb{R}$ می‌گیرد.

۱۴.۳ فرض کنید $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ تابعی پیوسته و $x_1, \cdots, x_n \in [a, b]$ باشد. نشان دهید نقطه $z \in [a, b]$ چنان موجود است که

$$f(z) = \frac{f(x_1) + \cdots + f(x_n)}{n}\,.$$

۱۵.۳ نشان دهید که تابع

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x^2 & ; x > 0\,, \\ 0 & ; x = 0\,, \\ -(1 + x^2) & ; x < 0\,, \end{cases}$$

روی $\mathbb{R}$ ناپیوسته است امّا دارای معکوس پیوسته است.

۱۶.۳ فرض کنید f و g توابه پیوسته یکنواخت روی مجموعه $S \subseteq \mathbb{R}$ باشند.

(الف) نشان دهید که $f+g$ نیز روی S پیوسته یکنواخت است.

(ب) هرگاه f و g روی S کراندار نیز باشند، آن‌گاه ثابت کنید که fg نیز پیوسته یکنواخت است.

۱۷.۳ فرض کنید f روی (a,b) پیوسته و $f(a^+)$ و $f(b^-)$ هر دو موجود و متناهی باشند، نشان دهید که f روی (a,b) پیوسته یکنواخت است.

۱۸.۳ اگر f روی (a,b) پیوسته یکنواخت باشد، ثابت کنید که روی این بازه کراندار است. توجه کنید که اگر f روی این بازه فقط پیوسته باشد، آن‌گاه مثالی بیاورید که ممکن است f بیکران باشد.

۱۹.۳ فرض کنید f تابعی پیوسته و یکنوا روی (a,b) باشد. ثابت کنید که f روی (a,b) پیوسته یکنواخت است اگروفقطاگر f روی این بازه کراندار باشد.

۲۰.۳ تابع f روی مجموعه $S \subseteq \mathbb{R}$ *لیپ‌شیتز*[1] نامیده می‌شود هرگاه $K > ۰$ چنان موجود باشد که برای هر $x, y \in S$ داشته باشیم

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x-y|\,.$$

(الف) ثابت کنید اگر f روی S لیپ‌شیتز باشد، آن‌گاه f روی این مجموعه پیوسته یکنواخت است.

(ب) نشان دهید که $f(x) = \sqrt{x}$ روی $[۰,۱]$ پیوسته یکنواخت است، امّا روی این بازه لیپ‌شیتز نیست.

۲۱.۳ تابع $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ را *محدب*[2] نامیم هرگاه برای هر $x, y \in (a,b)$ و هر $\lambda \in [۰,۱]$ داشته باشیم

$$f\big(\lambda x + (۱-\lambda)y\big) \leq \lambda f(x) + (۱-\lambda) f(y)\,.$$

ثابت کنید اگر f روی (a,b) محدب باشد، آن‌گاه f روی (a,b) پیوسته است.

۲۲.۳ تابع $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ را *محدب میانی*[3] نامیم هرگاه برای هر $x, y \in (a,b)$ داشته

[1] Lipschitz [2] convex function [3] midconvex function

باشیم
$$f\left(\frac{x+y}{۲}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{۲}\,.$$
(الف) ثابت کنید هر تابع محدب میانی و پیوسته روی (a,b)، پیوسته است.
(ب) ثابت کنید اگر f روی (a,b) محدب میانی و $x_۰$ای در (a,b) موجود باشد که f روی یک همسایگی از آن از بالا کراندار باشد، نشان دهید f روی (a,b) پیوسته است.

۴
مشتق

مسائل

۱.۴ نشان دهید توابع زیر در $x = \circ$ مشتق‌پذیر هستند:

(الف) $f(x) = x|x|$، (ب) $g(x) = x^{۲}|x|$.

۲.۴ نشان دهید که تابع

$$f(x) = \begin{cases} x^{۳} \sin \frac{۱}{x} & ; x \neq \circ\,, \\ \circ & ; x = \circ\,, \end{cases}$$

در $x = \circ$ مشتق‌پذیر است و علاوه‌براین f' در $x = \circ$ پیوسته است.

۳.۴ قضیه رول و قضیه مقدار میانگین لاگرانژ را برای تابع $f(x) = |x|$ روی $[-۱, ۱]$ بررسی کنید.

۴.۴ فرض کنید تابع f بر $(\circ, ۱]$ تعریف شده و دارای مشتق کراندار باشد. ثابت کنید دنباله $a_n = f\left(\frac{۱}{n}\right)$ دارای حد است.

۵.۴ فرض کنید $f(x) = a_۱ \sin x + a_۲ \sin ۲x + \cdots + a_n \sin nx$ و برای هر $x \in \mathbb{R}$، $|f(x)| \leq |\sin x|$ باشد. ثابت کنید

$$|a_۱ + ۲a_۲ + \cdots + na_n| \leq ۱\,.$$

۶.۴ فرض کنید $f\,:\,(a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ تابعی باشد که تا مرتبه دوّم مشتق‌پذیر با مشتق‌های پیوسته باشد. ثابت کنید که برای هر $x \in (a,b)$،

$$\lim_{h\to ۰} \frac{f(x+h) - ۲f(x) + f(x-h)}{h^۲} = f''(x)\,.$$

۷.۴ فرض کنید f بر $[۰,۱]$ پیوسته، $f(۰) = ۰$ و $f'(x)$ بر $(۰,۱)$ موجود و متناهی باشد. ثابت کنید اگر f' بر $(۰,۱)$ صعودی باشد، آنگاه $\dfrac{f(x)}{x}$ نیز صعودی است.

۸.۴ فرض کنید f بر (a,b) دارای مشتق متناهی و بر $[a,b]$ پیوسته بوده و $f(a) = f(b) = ۰$. ثابت کنید برای هر λ، عددی مانند $c \in (a,b)$ چنان موجود است که

$$f'(c) = \lambda f(c)\,.$$

۹.۴ فرض کنید f بر $[a,b]$ مشتق‌پذیر بوده $f(a) = ۰$ و عدد حقیقی مثبت A چنان موجود باشد به‌طوری‌که برای هر $x \in [a,b]$، $|f'(x)| \leq A|f(x)|$. ثابت کنید به‌ازای هر $x \in [a,b]$، $f(x) = ۰$.

۱۰.۴ فرض کنید f تابعی تعریف شده روی $\mathbb{R}$ باشد به‌طوری‌که به‌ازای هر $x, y \in \mathbb{R}$

$$|f(x) - f(y)| \leq (x-y)^۲\,.$$

ثابت کنید که f تابعی ثابت است.

۱۱.۴ فرض کنید f و g توابعی مشتق‌پذیر روی $\mathbb{R}$، $f(۰) = g(۰)$ و برای هر $x \geq ۰$، $f'(x) \leq g'(x)$. ثابت کنید که به‌ازای هر $x \geq ۰$، $f(x) \leq g(x)$.

۱۲.۴ سری مک‌لورن توابع هذلولوی زیر را به دست آورید:

$$\sinh x = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{۲}\,, \qquad \cosh x = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{۲}\,.$$

۱۳.۴ فرض کنید $f:(a,b)\longrightarrow \mathbb{R}$ مشتق‌پذیر باشد.

(الف) نشان دهید f محدب است اگروفقط‌اگر f' صعودی باشد.

(ب) اگر f دارای مشتق مرتبه دوم روی (a,b) باشد آن‌گاه f محدب است اگروفقط‌اگر برای هر $x\in(a,b)$، $f''(x)\geq 0$.

۵
انتگرال ریمان

مسائل

۱.۵ فرض کنید $۰ < a < b$ و

$$f(x) = \begin{cases} ۰ & ; x \in [a,b] \cap \mathbb{Q}\,, \\ x & ; x \in [a,b] \cap \mathbb{Q}^c\,. \end{cases}$$

انتگرال پایین و بالای f را روی $[a,b]$ به دست آورید و نشان دهید که f ریمان انتگرال‌پذیر است.

۲.۵ تابع f را روی $[۰,۱]$ به‌صورت زیر تعریف کنید

$$f(x) = \begin{cases} ۰ & ; x \in [۰,۱] \cap \mathbb{Q}^c \text{ یا } x = ۰\,, \\ \dfrac{۱}{n} & ; x = \dfrac{m}{n} \in [۰,۱] \cap \mathbb{Q} \text{ و } \gcd(m,n) = ۱\,. \end{cases}$$

نشان دهید که f ریمان انتگرال‌پذیر است و $\int_۰^۱ f(x)\,\mathrm{d}x = ۰$.

۳.۵ توابع انتگرال‌ناپذیر f و g را چنان بیابید که fg انتگرال‌پذیر باشد.

۴.۵ فرض کنید $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ تابعی ریمان انتگرال‌پذیر و $g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ تابعی باشد که مجموعه $E = \{x \in [a,b] \ : \ f(x) \neq g(x)\}$ متناهی است. نشان دهید که g ریمان انتگرال‌پذیر است و

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

آیا از این می‌توان نتیجه گرفت که مجموعه E شمارش‌پذیر است؟

۵.۵ هرگاه $f \in \mathcal{R}[a,b]$ و $\inf_{x\in[a,b]} |f(x)| > ۰$، آنگاه نشان دهید که $\frac{۱}{f} \in \mathcal{R}[a,b]$.

۶.۵ با یک مثال نشان دهید که هرگاه $|f|$ ریمان انتگرال‌پذیر باشد، لزوماً f ریمان انتگرال‌پذیر نیست.

۷.۵ ثابت کنید هرگاه f روی $[a,b]$ نامنفی و پیوسته بوده و $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = ۰$، آنگاه یا $a = b$ یا روی $[a,b]$، $f \equiv ۰$.

۸.۵ فرض کنید $f : [a,b] \longrightarrow [\alpha,\beta]$ اکیداً صعودی، پیوسته و پوشا باشد. ثابت کنید

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_\alpha^\beta f^{-۱}(t)\,\mathrm{d}t = b\beta - a\alpha\,.$$

۹.۵ فرض کنید f روی $[a,b]$ تابعی نامنفی و پیوسته بوده و $c > ۰$ باشد. اگر برای هر $x \in [a,b]$ داشته باشیم

$$f(x) \leq c\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\,,$$

ثابت کنید که روی $[a,b]$، $f \equiv ۰$.

۱۰.۵ **(قضیه دوم مقدار میانگین برای انتگرال‌ها)** ثابت کنید اگر f و g روی $[a,b]$ تعریف شده و g پیوسته، $f \geq ۰$ و f انتگرال‌پذیر باشد، آنگاه نقطه $c \in (a,b)$ چنان موجود است که

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = g(c)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

۱۱.۵ فرض کنید f تابعی نامنفی و پیوسته بر $[a,b]$ بوده و M ماکزیمم مقدار f روی $[a,b]$ باشد. نشان دهید که

$$M = \lim_{n\to\infty} \left(\int_a^b f^n(x)\, \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{n}} .$$

۱۲.۵ فرض کنید f تابعی کراندار روی $[a,b]$ باشد. هرگاه دنباله $\{P_n\}$ از افرازهای $[a,b]$ چنان موجود باشد که $\lim_{n\to\infty} \big(U(P_n,f) - L(P_n,f) \big) = 0$، آن‌گاه ثابت کنید که $f \in \mathcal{R}[a,b]$ و

$$\int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} U(P_n,f) = \lim_{n\to\infty} L(P_n,f) .$$

آیا عکس این مطلب نیز درست است؟

۱۳.۵ فرض کنید f، g و h سه تابع کراندار روی $[a,b]$ باشند که برای هر $x \in [a,b]$، $f(x) \le g(x) \le h(x)$. اگر $f,h \in \mathcal{R}[a,b]$ و

$$\int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x = \int_a^b h(x)\, \mathrm{d}x = \alpha ,$$

آن‌گاه ثابت کنید که $g \in \mathcal{R}[a,b]$ و $\int_a^b g(x)\, \mathrm{d}x = \alpha$.

۱۴.۵ فرض کنید $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ تابعی کراندار و مجموعه نقاط پیوستگی f حداکثر شمارش‌پذیر باشد. نشان دهید $f \in \mathcal{R}$.

۱۵.۵ فرض کنید f تابع پیوسته‌ای روی $[a,b]$ باشد که برای هر تابع پیوسته g روی $[a,b]$

$$\int_a^b f(x)g(x)\, \mathrm{d}x = 0 .$$

ثابت کنید که روی $[a,b]$، $f \equiv 0$.

۱۶.۵ اگر $f : [0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ تابعی صعودی باشد آن‌گاه تابع میانگین حسابی

$$F(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t)\, dt \qquad (x > 0)$$

نیز صعودی است.

۱۷.۵ فرض کنید f روی $[\circ, ۱]$ انتگرال‌پذیر باشد. نشان دهید که

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\circ}^{۱} x^n f(x)\,\mathrm{d}x = \circ\,.$$

۱۸.۵ **(مشتق‌گیری از انتگرال)** فرض کنید f تابعی پیوسته u و v توابعی مشتق‌پذیر روی $[a, b]$ باشند. تابع $F : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ را به‌صورت

$$F(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,\mathrm{d}t$$

در نظر بگیرید. نشان دهید F مشتق‌پذیر است و

$$F'(x) = f(v(x))v'(x) - f(u(x))u'(x)\,.$$

۱۹.۵ برای هر دو عدد طبیعی m و n، ثابت کنید

$$\int_{\circ}^{۱} x^n(۱-x)^m\,\mathrm{d}x = \int_{\circ}^{۱} x^m(۱-x)^n\,\mathrm{d}x\,.$$

۲۰.۵ فرض کنید $f : [\circ, ۱] \longrightarrow [\circ, ۱]$ تابعی پیوسته باشد. ثابت کنید که معادله زیر دارای جوابی منحصربفرد در $[\circ, ۱]$ است

$$۲x - \int_{\circ}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = ۱\,.$$

۲۱.۵ فرض کنید $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ توابع پیوسته‌ای باشند که برای هر $x \in \mathbb{R}$، $f(x+۱) = f(x)$ و $g(x+۱) = g(x)$. ثابت کنید

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\circ}^{۱} f(x)g(nx)\,\mathrm{d}x = \left(\int_{\circ}^{۱} f(x)\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_{\circ}^{۱} g(x)\,\mathrm{d}x\right)\,.$$

۲۲.۵ فرض کنید p و q اعداد حقیقی مثبتی باشند به‌طوری‌که $\frac{۱}{p} + \frac{۱}{q} = ۱$. گزاره‌های زیر را ثابت کنید:

(الف) اگر $u \geq \circ$ و $v \geq \circ$، آنگاه

$$uv \leq \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q}\,.$$

تساوی برقرار است اگروفقطاگر $u^p = v^q$.

(ب) اگر $f, g \geq ۰$ و $f, g \in \mathcal{R}[a, b]$ بوده و

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = ۱ = \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

آن‌گاه

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \leq ۱\,.$$

(ج) اگر f و g توابع مختلطی در $\mathcal{R}[a, b]$ باشند، آن‌گاه

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}\,.$$

نامساوی اخیر را *نامساوی هولدر*[1] می‌نامیم. در صورتی که $p = q = ۲$ باشد، آن را *نامساوی کوشی– شوارتز*[2] می‌نامند.

[1] Hölder inequality [2] Cauchy-Schwartz inequality

۶

دنباله‌ها و سری‌های توابع

مسائل

۱.۶ نشان دهید که هرگاه $\{f_n\}$ و $\{g_n\}$ روی مجموعه E به‌طور یکنواخت همگرا باشند، آن‌گاه $\{f_n + g_n\}$ نیز روی E به‌طور یکنواخت همگرا است. هرگاه علاوه‌براین، $\{f_n\}$ و $\{g_n\}$ دنباله‌هایی از توابع کراندار باشند، ثابت کنید $\{f_n g_n\}$ بر E به‌طور یکنواخت همگرا خواهد بود. دنباله‌های $\{f_n\}$ و $\{g_n\}$ را طوری بسازید که بر مجموعه‌ای چون E به‌طور یکنواخت همگرا باشند، ولی $\{f_n g_n\}$ بر E به‌طور یکنواخت همگرا نباشد.

۲.۶ نشان دهید که دنباله توابع $\left\{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{n}}\right\}$ بر $(0, \pi)$ همگرای نقطه‌ای است ولی همگرای یکنواخت نیست.

۳.۶ فرض کنید

$$f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n}\,.$$

نشان دهید که $\{f_n\}$ روی $\mathbb{R}$ همگرای یکنواخت است.

۴.۶ فرض کنید

$$f_n(x) = x\mathrm{e}^{-nx} .$$

(الف) نشان دهید که $\{f_n\}$ روی $[\circ, +\infty)$ به تابع $f(x) = \circ$ همگرای نقطه‌ای است.

(ب) فرض کنید $M_n = \sup\{|f_n(x)| \ : \ x \in [\circ, +\infty)\}$. نشان دهید که

$$M_n = \frac{۱}{n\mathrm{e}} .$$

(ج) نتیجه بگیرید که روی $[\circ, +\infty)$ دنباله $\{f_n\}$ همگرای یکنواخت است.

۵.۶ دنباله توابع $\{f_n\}$ روی $[\circ, ۱]$ را به‌صورت $f_n(x) = x^n$ در نظر بگیرید.

(الف) نشان دهید که روی $[\circ, ۱]$، $\{f_n\}$ همگرای نقطه‌ای است.

(ب) نشان دهید که $\{f_n\}$ روی $[\circ, ۱]$ همگرای یکنواخت نیست.

(ج) زیرمجموعه‌ای از $[\circ, ۱]$ را چنان بیابید که $\{f_n\}$ روی آن همگرای یکنواخت باشد.

۶.۶ فرض کنید $f_n(x) = \frac{x}{n}$ باشد. نشان دهید که $\{f_n\}$ بر $\mathbb{R}$ همگرای نقطه‌ای به تابع $f(x) = \circ$ است. هرگاه E زیرمجموعه کرانداری از $\mathbb{R}$ باشد، آنگاه ثابت کنید که روی E، $f_n \xrightarrow{u} f$، در حالی که روی $\mathbb{R}$، $f_n \overset{u}{\nrightarrow} f$.

۷.۶ دنباله توابع $\{f_n\}$ را به‌صورت زیر در نظر بگیرید

$$f_n(x) = \frac{x}{۱ + nx^۲} .$$

نشان دهید که $\{f_n\}$ به‌طور یکنواخت به تابعی چون f همگرا است و تساوی

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f'_n(x)$$

برای $x \neq \circ$ درست و برای $x = \circ$ درست نیست.

۸.۶ هرگاه $\{f_n\}$ روی $\mathbb{R}$ به تابع پیوسته f همگرای یکنواخت باشد، آنگاه ثابت کنید که

$$\lim_{n\to\infty} f_n\left(x + \frac{۱}{n}\right) = f(x) , \quad x \in \mathbb{R} .$$

۹.۶ فرض کنید $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ پیوسته یکنواخت باشد. برای هر $n\in\mathbb{N}$ دنباله توابع $\{f_n\}$ را به‌صورت زیر تعریف کنید

$$f_n(x)=f\left(x+\frac{۱}{n}\right).$$

نشان دهید روی $\mathbb{R}$، $f_n \xrightarrow{u} f$.

۱۰.۶ فرض کنید $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع پیوسته روی $[a,b]$ باشد که $f_n \xrightarrow{u} f$. قرار دهید

$$F_n(x)=\int_a^x f_n(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{و} \quad F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

(الف) نشان دهید توابع F_n و F روی $[a,b]$ تعریف شده‌اند.

(ب) نشان دهید روی $[a,b]$، $F_n \xrightarrow{u} F$.

۱۱.۶ نشان دهید دنباله توابع تعریف شده با

$$f_n(x)=\begin{cases} ۰ & ;x<\frac{۱}{n+۱}, \\ \sin^۲\frac{\pi}{x} & ;\frac{۱}{n+۱}\le x\le\frac{۱}{n}, \\ ۰ & ;x>\frac{۱}{n}, \end{cases}$$

به یک تابع f روی $\mathbb{R}$ همگرای نقطه‌ای است. آیا این همگرایی یکنواخت نیز هست؟

۱۲.۶ فرض کنید $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع حقیقی پیوسته روی $[a,b]$ باشد که $f_n \xrightarrow{u} f$. ثابت کنید

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^{b-\frac{۱}{n}} f_n(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

۱۳.۶ فرض کنید $f_n \xrightarrow{u} f$ روی یک مجموعه E و $\{x_n\}$ دنباله‌ای از نقاط E باشد که به نقطه $x\in E$ همگرا است. نشان دهید

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x_n)=f(x).$$

۱۴.۶ فرض کنید X مجموعه همه چندجمله‌ای‌های روی $[۰,۱]$ بوده و d متر تعریف شده روی X به‌صورت زیر باشد

$$d(f,g)=\max_{x\in[۰,۱]}|f(x)-g(x)|.$$

(الف) قرار دهید

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \,.$$

نشان دهید که دنباله توابع $\{f_n\}$ روی $[0, 1]$ همگرای یکنواخت است.

(ب) نشان دهید که فضای متری (X, d) کامل نیست.

۱۵.۶ نشان دهید که $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n^2}$ روی $[-1, 1]$ همگرای یکنواخت است.

۱۶.۶ (الف) با استفاده از مجموع سری هندسی نشان دهید که

$$\frac{1}{1 - \mathrm{e}^{-x}} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-nx} \,, \quad (x > 0) \,.$$

(ب) توضیح دهید که چگونه با مشتق‌گیری جمله‌به‌جمله از سری فوق می‌توان نشان داد که

$$\frac{\mathrm{e}^{-x}}{(1 - \mathrm{e}^{-x})^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n\mathrm{e}^{-nx} \,, \quad (x > 0) \,.$$

(ج) آیا سری $\sum_{n=1}^{\infty} n\mathrm{e}^{-nx}$ روی $(0, +\infty)$ همگرای یکنواخت است؟

۱۷.۶ (الف) نشان دهید که که سری

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{x}{n}}{n}$$

روی $\mathbb{R}$ همگرای یکنواخت است.

(ب) نشان دهید که تابع f مشتق‌پذیر است و تابع مشتق $f'(x)$ را به‌صورت صریح به دست آورید.

۱۸.۶ ابتدا نشان دهید که

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx) \,, \quad x \in (-\pi, \pi) \,.$$

اگر از تساوی بالا، جمله‌به‌جمله مشتق بگیریم، خواهیم داشت

$$1 = \sum_{n=1}^{\infty} 2(-1)^{n+1} \cos(nx) \,, \quad x \in (-\pi, \pi) \,.$$

آیا رابطه فوق درست است؟

۱۹.۶ نشان دهید سری $\sum_{n=۱}^{\infty} f_n$ که

$$f_n(x) = \frac{x^۲}{(۱ + x^۲)^n}\,, \quad (x \in \mathbb{R})$$

همگرای نقطه‌ای است، و هر جمله از سری پیوسته است، امّا تابع مجموع پیوسته نیست.

۲۰.۶ نشان دهید سری

$$\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$$

بر هر بازه‌ای که شامل $x = ۰$ باشد همگرای یکنواخت نیست.

۲۱.۶ ثابت کنید سری

$$\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{x}{n(۱ + nx^۲)}$$

در $\mathbb{R}$ همگرای یکنواخت است.

۲۲.۶ (الف) نشان دهید که سری

$$\sum_{n=۰}^{\infty} \frac{۱}{۱ + n^۲ x}$$

برای $x > ۰$ همگرا و برای $x = ۰$ واگرا است.

(ب) نشان دهید که برای هر $a > ۰$، سری فوق روی $[a, +\infty)$ به‌طور یکنواخت همگرا است.

(ج) تعریف کنید

$$f : (۰, +\infty) \to \mathbb{R}\,, \quad f(x) = \sum_{n=۰}^{\infty} \frac{۱}{۱ + n^۲ x}\,.$$

نشان دهید که f پیوسته است.

(د) نشان دهید که سری روی $(۰, +\infty)$ همگرای یکنواخت نیست.

۲۳.۶ هرگاه سری $\sum_{n=۰}^{\infty} a_n$ یک سری همگرا با جمله‌های نامنفی بوده و $f(x) = \sum_{n=۰}^{\infty} a_n x^n$ باشد که $x \in (-۱, ۱)$، ثابت کنید که f روی $(-۱, ۱)$ پیوسته است.

۲۴.۶ هرگاه برای یک M به‌قدر کافی بزرگ، $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < M$، آنگاه ثابت کنید
$$\int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) \, \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} \, .$$

۲۵.۶ با استفاده از آزمون Mـ وایرشتراس نشان دهید سری‌های زیر برای $p > 1$ همگرای یکنواخت هستند
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^p} \quad \text{و} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^p} \, .$$

۲۶.۶ (الف) نشان دهید که سری
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan(nx)}{n^2}$$
روی $\mathbb{R}$ همگرای یکنواخت است، و توضیح دهید که چرا تابع f تعریف شده با
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan(nx)}{n^2}$$
روی $\mathbb{R}$ پیوسته است.

(ب) نشان دهید که f در هر نقطه $x \neq 0$ مشتق‌پذیر است. تابع $f'(x)$ را محاسبه کنید.

(ج) نشان دهید که f در $x = 0$ مشتق‌پذیر نیست.

۲۷.۶ با استفاده از سری هندسی $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ برای $|x| < 1$، این مسئله روشی را برای محاسبه عدد π ارائه می‌کند.

(الف) نشان دهید برای هر $x \in (-1, 1)$، داریم
$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \, .$$

(ب) نشان دهید برای هر $y \in [0, 1)$،
$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \, .$$

(ج) ثابت کنید که تساوی قسمت (ب) برای $x = 1$ نیز درست است.

(د) ثابت کنید
$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} \, .$$

۲۸.۶ (الف) نشان دهید که سری

$$\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n^x}$$

برای هر $a > ۱$، روی بازه $[a, +\infty)$ همگرای یکنواخت است.

(ب) برای هر $x > ۱$، قرار دهید $f(x) = \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n^x}$. نشان دهید که

$$f'(x) = -\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{\ln x}{n^x} .$$

منابع

[1] A.G. Aksoy and M.A. Khamsi, *A problem book in real analysis*, Springer, 2010.

[2] O. Hijab, *Introduction to calculus and classical analysis*, Springer, 2011.

[3] H. Hosseini Giv, *Mathematical analysis and its inherent nature*, AMS, 2016.

[4] W.J. Kaczor and M.T. Nowak, *Problems in mathematical analysis I*, AMS, 1996.

[5] W.J. Kaczor and M.T. Nowak, *Problems in mathematical analysis II*, AMS, 1998.

[6] W.J. Kaczor and M.T. Nowak, *Problems in mathematical analysis III*, AMS, 2000.

[7] S. Kumaresan, *Topology of metric spaces*, Alpha Sciences International Ltd., 2005.

[8] T.L. Lindstrøm, *Spaces, an introduction to real analysis*, AMS, 2017.

[9] W. Rudin, *Principles of mathematical analysis*, 3rd ed., Mc Grraw Hill, 1976.

[10] R.B. Schinazi, *From classical to modern analysis*, Birkhäuser, 2018.

[11] K.A. Stromberg, *An introduction to classical real analysis*, AMS Chelsea Publishing, 2015.

[12] T-L.T. Rădulescu, V.D. Rădulescu and T. Andreescu, *Problems in real analysis: Advanced calculus on the real axis*, Springer, 2009.

[۱۳] ج. روئین و ع. مرصّعی، *مبانی نظریه نامساوی‌ها*، انتشارات دانشگاه زنجان، ۱۳۹۸.

[۱۴] ع. مرصّعی، *آنالیز ریاضی*، انتشارات سلاله زنجان، ۱۳۸۲.

Fundamentals of Mathematical Analysis

By:
Ali Morassaei
Faculty Member of the University of Zanjan

The University of Zanjan Press
2020