



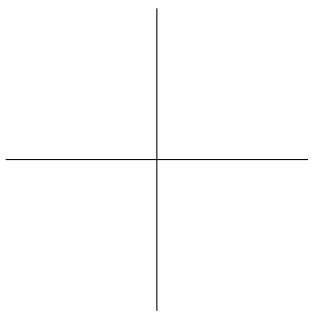
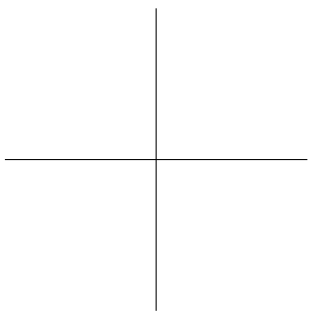
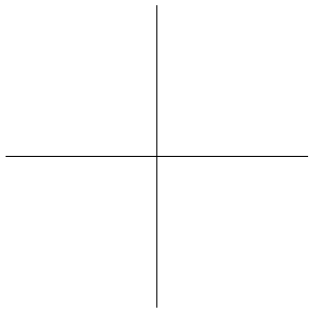
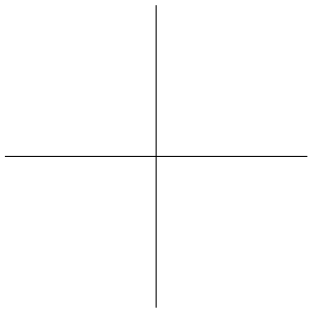
مبانی آنالیز ریاضی

علی مرصعی

عضو هیئت علمی دانشگاه زنجان

انتشارات دانشگاه زنجان

۱۳۹۸



فهرست مطالب

ب	مقدمه
چ	فهرست شکل‌ها
۱	۱ فضاهای متری
۱	مسائل
۷	۲ دنباله‌ها و سری‌های عددی
۷	مسائل
۱۱	۳ پیوستگی
۱۱	مسائل
۱۷	۴ مشتق
۱۷	مسائل

ت فهرست مطالب

۲۱	۵	انتگرال ریمان
۲۱	مسائل
۲۷	۶	دنباله‌ها و سری‌های توابع
۲۷	مسائل
۳۵	منابع	

۱

فضاهای متری

مسائل

- ۱.۱ نشان دهید تابع $d(x, y) = \sqrt{|x - y|}$ یک متر روی \mathbb{R} است.
- ۲.۱ فرض کنید X مجموعه همه توابع پیوسته از $[a, b]$ به \mathbb{R} باشد. برای هر $x, y \in X$ تعریف کنید

$$d(x, y) = \max \{ |x(t) - y(t)| : t \in [a, b] \}.$$

- نشان دهید (X, d) یک فضای متری است.
- ۳.۱ فرض کنید X مجموعه همه توابع پیوسته از $[a, b]$ به \mathbb{R} باشد. برای هر $x, y \in X$ تعریف کنید

$$d(x, y) = \int_a^b |x(t) - y(t)| dt.$$

نشان دهید (X, d) یک فضای متری است.

۴.۱ فرض کنید (X, d) یک فضای متری باشد. نشان دهید برای هر $x, y, z, w \in X$ داریم

$$|d(x, z) - d(z, y)| \leq d(x, y)$$

و

$$|d(x, y) - d(z, w)| \leq d(x, z) + d(y, w).$$

۵.۱ فرض کنید (X, d) یک فضای متری باشد. تابع ρ را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$\rho(x, y) := \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}, \quad (x, y \in X).$$

نشان دهید ρ یک متر روی X است.

(توجه کنید که متر ρ یک متر کراندار روی X است؛ زیرا برای هر $x, y \in X$ ،

$$\rho(x, y) < 1$$

۶.۱ فرض کنید (X, d) یک فضای متری باشد. تابع δ را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$\delta(x, y) := \min\{1, d(x, y)\}, \quad (x, y \in X).$$

نشان دهید δ یک متر کراندار روی X است.

۷.۱ نشان دهید در هر فضای متری X ، شرط لازم و کافی برای اینکه $A \subseteq X$ باز باشد آن

است که $A^\circ = A$. همچنین نشان دهید که A° بزرگترین مجموعه باز مشمول در A است.

۸.۱ فرض کنید (X, d) فضای متری، $x \in X$ و $0 < r < s$ باشد. نشان دهید که

$B(x; r) \subseteq B(x; s)$. همچنین نشان دهید که ممکن است $B(x; r) = B(x; s)$ حتی اگر $r < s$ باشد.

۹.۱ (خاصیت هاوسدورف^۱) فرض کنید x و y دو نقطه مجزا در فضای متری X باشد،

نشان دهید که $r > 0$ چنان موجود است که $B(x; r) \cap B(y; r) = \emptyset$.

۱۰.۱ نشان دهید که $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy \neq 0\}$ در فضای اقلیدسی \mathbb{R}^2 باز است.

^۱Hausdorff property

۱۱.۱ مجموعه نقاط حدی مجموعه‌های زیر را در فضای اقلیدسی \mathbb{R} مشخص کنید و سپس تعیین کنید که کدام یک از آنها باز و کدام یک بسته هستند.

(الف) \mathbb{Z} ,

(ب) $A = \left\{ \frac{1}{n} + \frac{1}{m} : n, m \in \mathbb{N} \right\}$

(ج) $B = \left\{ (-1)^n + \frac{1}{m} : n, m \in \mathbb{N} \right\}$

(د) $C = \left\{ \frac{1}{n} + \frac{1}{m} : n, m \in \mathbb{N} \right\}$

(هـ) $D = \left\{ \frac{(-1)^n}{1 + \frac{1}{n}} : n \in \mathbb{N} \right\}$

۱۲.۱ فضای اقلیدسی \mathbb{R} را در نظر بگیرید و فرض کنید $A = (-1, 1) \cup (1, 2)$. به سوالات زیر با توضیح پاسخ دهید.

(الف) قطر A چه قدر است؟

(ب) آیا A باز است، بسته یا هیچ کدام؟

(ج) آیا $x = 1$ نقطه حدی A است؟

(د) بستار A ، \bar{A} را به دست آورید.

(هـ) آیا A همبند است؟

۱۳.۱ فرض کنید E مجموعه‌ای در فضای متریک X باشد.

(الف) ثابت کنید E° همیشه باز است.

(ب) هرگاه $G \subseteq E$ و G باز باشد، آنگاه ثابت کنید $G \subseteq E^\circ$.

(ج) ثابت کنید $(E^\circ)^c = \overline{E^c}$.

(د) آیا E° و $\overline{E^\circ}$ همیشه برابر هستند؟

(هـ) آیا $\overline{E^\circ}$ و \overline{E} همواره برابر هستند؟

۱۴.۱ فرض کنید X یک فضای متریک و $A, B \subseteq X$ باشند. نشان دهید که

(الف) $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$.

(ب) $(A \cup B)^\circ \supseteq A^\circ \cup B^\circ$. همچنین مثالی بیاورید که نشان دهد تساوی ممکن

است برقرار نباشد.

۱۵.۱ فرض کنید X فضای متریک و $A, B \subseteq X$. ثابت کنید:

(الف) $(A')' \subseteq A'$ در X بسته است، یعنی $(A')' \subseteq A'$.

(ب) هرگاه $A \subseteq B$ ، آنگاه $A' \subseteq B'$.

(ج) $(A \cup B)' = A' \cup B'$.

(د) $(A \cap B)' \subseteq A' \cap B'$.

(هـ) $(\overline{A})' = A'$.

۱۶.۱ هرگاه A_1, \dots, A_n مجموعه‌هایی در یک فضای مترى X باشند، نشان دهید که:

(الف) $\overline{(\cup_{i=1}^n A_i)} = \cup_{i=1}^n \overline{A_i}$.

(ب) $\overline{(\cap_{i=1}^n A_i)} \subseteq \cap_{i=1}^n \overline{A_i}$.

۱۷.۱ ثابت کنید اشتراک هر خانواده دلخواه از زیرمجموعه‌های فشردۀ فضای مترى X ، مجموعه‌ای فشردۀ است.

۱۸.۱ ثابت کنید اجتماع تعداد متناهی از زیرمجموعه‌های فشردۀ فضای مترى X ، فشردۀ است.

۱۹.۱ فرض کنید A زیرمجموعه‌ای از فضای مترى X باشد. نقطه $x \in X$ را نقطه مرزى A می‌نامیم هرگاه برای هر $r > 0$

$$B(x; r) \cap A \neq \emptyset \quad \text{و} \quad B(x; r) \cap A^c \neq \emptyset.$$

مجموعه همه نقاط مرزى A را با نماد ∂A نمایش می‌دهیم.

(الف) نقاط مرزى مجموعه‌های زیر را در فضای اقلیدسى \mathbb{R}^2 مشخص کنید:

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\},$$

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\},$$

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}.$$

(ب) ثابت کنید $\partial A = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}$ و نتیجه بگیرید که ∂A یک مجموعه بسته است.

(ج) $\partial A = \partial(X \setminus A)$.

(د) هرگاه $\overline{A} \cap \overline{B} = \emptyset$ ، آنگاه $\partial(A \cup B) = \partial A \cup \partial B$.

۲۰.۱ نشان دهید که یک فضای مترى X همبند است اگر و فقط اگر هر تابع پیوسته $f : X \rightarrow \{\pm 1\}$ یک تابع ثابت باشد.

۲۱.۱ برای هر $r > 0$ ، نشان دهید که دایره $C_r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = r^2\}$ همبند مسیری است.

۲۲.۱ نشان دهید که هذلولی $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 = 1\}$ همبند مسیری نیست.

۲۳.۱ فرض کنید X مجموعه ناتهی و d متر گسسته روی X باشد. نشان دهید

(الف) اگر $A \subseteq X$ باشد، آنگاه A هم باز و هم بسته است.

(ب) اگر $A \subseteq X$ فشرده است اگر و فقط اگر A متناهی باشد.

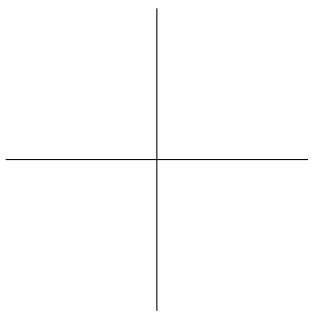
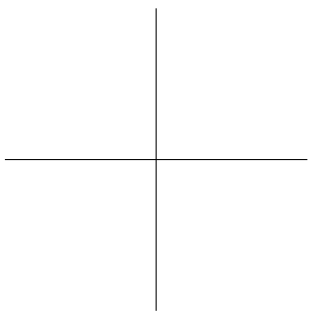
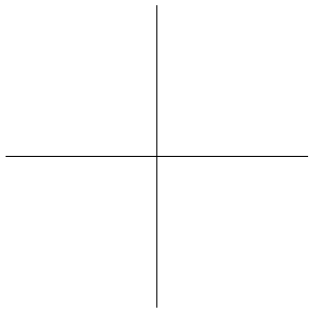
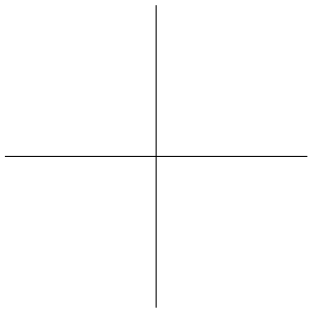
(ج) تنها زیرمجموعه‌های همبند X تک عضوی هستند.

۲۴.۱ مجموعه $E \subseteq \mathbb{R}^n$ را محدب^۱ نامیم هرگاه برای هر $x, y \in E$ و هر $\lambda \in [0, 1]$

$$\lambda x + (1 - \lambda)y \in E.$$

ثابت کنید هر مجموعه محدب در \mathbb{R}^n همبند است.

¹convex set



۲

دنباله‌ها و سری‌های عددی

مسائل

- ۱.۲ فرض کنید $x \in \mathbb{R}$ چنان باشد که $|x| < 1$. نشان دهید $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0$.
- ۲.۲ فرض کنید $a > 0$ باشد. ثابت کنید که دنباله $\{\sqrt[n]{a}\}$ به ۱ همگرا است.
- ۳.۲ فرض کنید $\{x_n\}$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی باشد که $\{x_{2n}\}$ ، $\{x_{2n+1}\}$ و $\{x_{3n}\}$ همگرا هستند. نشان دهید که $\{x_n\}$ همگرا است.
- ۴.۲ فرض کنید $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ دو دنباله حقیقی باشند به طوری که
- (آ) برای هر $n \in \mathbb{N}$ ، $x_n \leq y_n$.
- (ب) دنباله $\{x_n\}$ صعودی است.
- (ج) دنباله $\{y_n\}$ نزولی است.

نشان دهید که دنباله‌های $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ همگرا هستند و

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} y_n.$$

۵.۲ نشان دهید که دنباله $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$ همگرا نیست، ولی دنباله

$$y_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln(n)$$

۶.۲ نشان دهید که دنباله

$$x_n = \int_1^n \frac{\cos t}{t^2} dt$$

یک دنباله کوشی است.

۷.۲ فرض کنید (X, d) یک فضای متریک و $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ دو دنباله کوشی در X باشند.

نشان دهید که دنباله $\{d(x_n, y_n)\}$ در \mathbb{R} همگرا است.

۸.۲ نشان دهید که هر فضای متریک گسسته، فضای کامل است.

۹.۲ با استفاده از میانگین چزارو، نشان دهید که اگر $\{x_n\}$ دنباله‌ای باشد که

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_{n+1} - x_n) = \ell$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n} = \ell.$$

۱۰.۲ فرض کنید $\{x_n\}$ دنباله‌ای یکنوا باشد. نشان دهید که $\{x_n\}$ همگرا است اگر و فقط اگر

دنباله دارای یک زیردنباله همگرا باشد.

۱۱.۲ فرض کنید برای هر $n \geq 1$ ، $x_n > 0$ باشد و

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = r < 1.$$

نشان دهید که $\{x_n\}$ همگرا است.

۱۲.۲ قرار دهید $x_1 = 1$ و برای هر $n \geq 2$

$$x_n = x_{n-1} + \frac{1}{x_{n+1}}.$$

نشان دهید که $\{x_n\}$ واگرا است.

۱۳.۲ تعریف کنید $r_1 = 1$ و برای هر $n \geq 2$

$$r_n = 1 + \frac{1}{r_{n-1}}.$$

(الف) نشان دهید که اگر $\{r_n\}$ همگرا باشد، آنگاه باید به

$$\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2},$$

همگرا باشد، که این عدد، نسبت طلایی^۱ نامیده می‌شود.

(ب) نشان دهید که برای هر $n \geq 2$ داریم

$$|r_n - \phi| \leq \frac{1}{\phi} |r_{n-1} - \phi|.$$

(ج) نشان دهید که $\{r_n\}$ باید به ϕ همگرا باشد.

۱۴.۲ فرض کنید $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ دو دنباله دلخواه باشند. ثابت کنید

(الف) $\liminf_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n + \liminf_{n \rightarrow \infty} y_n$

(ب) $\limsup_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n + \limsup_{n \rightarrow \infty} y_n$

۱۵.۲ فرض کنید $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ دو دنباله دلخواه با جملات مثبت باشند. ثابت کنید

(الف) $\limsup_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) \leq (\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n) (\limsup_{n \rightarrow \infty} y_n)$

(ب) مثالی ارائه دهید که نامساوی بالا اکید باشد.

۱۶.۲ همگرایی سری‌های زیر را بررسی کنید:

(الف) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n+1}{3n^3 - n^2 - 1}$

(ب) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4^n}$

(ج) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{n^2}$

(د) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$

(ه) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n} - 1)^n$

(و) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3}$

(ز) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$

¹golden ratio

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2} \quad (\text{ح})$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{e^n} \quad (\text{ط})$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{1/n}}{n^2} \quad (\text{ی})$$

۱۷.۲ هرگاه $x_n > 0, n = 1, 2, \dots$ ، آنگاه نشان دهید که

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}.$$

نتیجه بگیرید که اگر $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$ موجود باشد، آنگاه $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n}$ نیز موجود و باهم برابر هستند. آیا حالت عکس این مطلب نیز برقرار است؟

۱۸.۲ نشان دهید که

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e \quad (\text{الف})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots 2n}}{n} = \frac{e}{e} \quad (\text{ب})$$

۱۹.۲ ثابت کنید هرگاه $x_n \geq 0$ ، همگرایی $\sum x_n$ همگرایی $\sum \frac{\sqrt{x_n}}{n}$ را ایجاب می‌کند.

۲۰.۲ ثابت کنید سری زیر واگرا است

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right)}.$$

۲۱.۲ فرض کنید $\{x_n\}$ دنباله‌ای نزولی و $\sum x_n$ همگرا باشد، ثابت کنید

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nx_n = 0.$$

۳

پیوستگی

مسائل

۱.۳ ثابت کنید

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + e^{-\frac{1}{x}}} = 1.$$

۲.۳ نشان دهید که تابع دیریکله

$$D(x) = \begin{cases} 1 & ; x \in \mathbb{Q} \\ 0 & ; x \in \mathbb{Q}^c \end{cases}$$

در هیچ نقطه‌ای پیوسته نیست.

۳.۳ پیوستگی توابع زیر را در نقطه داده شده بررسی کنید:

$$.x = 0 \text{ در } f(x) = \begin{cases} x - |x| & \text{(الف) } x = 0 \text{ در } \\ x^m \sin \frac{1}{x} & ; x \neq 0, m > 0 \\ 0 & ; x = 0 \end{cases} \text{(ب)}$$

۴.۳ تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ را به صورت زیر تعریف کنید

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & ; x = \frac{m}{n}, \gcd(m, n) = 1, \\ 0 & ; x \in \mathbb{Q}^c. \end{cases}$$

نشان دهید که f در هر نقطه گنگ پیوسته و در هر نقطه گویا ناپیوسته است.

۵.۳ تابع $p: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ را به صورت $p(x, y) = x$ در نظر بگیرید.

(الف) نشان دهید که p یک تابع پیوسته نسبت به متر اقلیدسی است.

(ب) $p^{-1}(\{0\})$ را به دست آورید. آیا این مجموعه باز است؟ بسته است؟ یا هیچ کدام؟

۶.۳ تابع $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ را به صورت زیر در نظر بگیرید

$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & ; (x, y) \neq (0, 0), \\ a & ; (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

که در آن a یک عدد حقیقی ثابت است. نشان دهید که تابع g در $(0, 0)$ پیوسته نیست.

۷.۳ ثابت کنید که اگر c یک نقطه تنها برای مجموعه D باشد، آنگاه f در c پیوسته است.

۸.۳ فرض کنید $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی باشد که برای هر $x, y \in \mathbb{R}$

$$f(x + y) = f(x) + f(y).$$

نشان دهید که

(الف) برای هر $x \in \mathbb{R}$ و هر $n \in \mathbb{N}$ ، $f(nx) = nf(x)$.

(ب) f در یک نقطه پیوسته است اگر و فقط اگر f روی \mathbb{R} پیوسته باشد.

(ج) f پیوسته است اگر و فقط اگر $m \in \mathbb{R}$ چنان موجود باشد که $f(x) = mx$.

۹.۳ فرض کنید (X, d) فضای متری باشد. نگاشت $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ را به صورت زیر تعریف

کنید

$$f(x) = d(x, a),$$

که در آن $a \in X$ یک نقطه ثابت است. نشان دهید که f روی X پیوسته است.

۱۰.۳ فرض کنید (X, d_X) و (Y, d_Y) دو فضای متری و $f : X \rightarrow Y$ تابعی پیوسته باشد. نشان دهید که برای هر $A \subseteq X$

$$f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}.$$

۱۱.۳ فرض کنید $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی با این خاصیت باشد که برای $M > 0$ ای،

$$|f(x)| \leq M|x|^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

ثابت کنید که

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0.$$

۱۲.۳ فرض کنید f تابع پیوسته‌ای روی $[a, b]$ باشد. اگر برای هر $x \in [a, b]$ ، $y \in [a, b]$ چنان موجود باشد که

$$|f(y)| \leq \frac{1}{4}|f(x)|,$$

آن‌گاه نشان دهید که $c \in [a, b]$ چنان موجود است که $f(c) = 0$.

۱۳.۳ فرض کنید f تابعی پیوسته روی \mathbb{R} باشد و

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

ثابت کنید f روی \mathbb{R} کراندار است و ماکزیمم یا می‌نیم خود را روی \mathbb{R} می‌گیرد.

۱۴.۳ فرض کنید $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی پیوسته و $x_1, \dots, x_n \in [a, b]$ باشد. نشان دهید نقطه $z \in [a, b]$ چنان موجود است که

$$f(z) = \frac{f(x_1) + \dots + f(x_n)}{n}.$$

۱۵.۳ نشان دهید که تابع

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x^2 & ; x > 0, \\ 0 & ; x = 0, \\ -(1 + x^2) & ; x < 0, \end{cases}$$

روی \mathbb{R} ناپیوسته است اما دارای معکوس پیوسته است.

- ۱۶.۳ فرض کنید f و g توابع پیوسته یکنواخت روی مجموعه $S \subseteq \mathbb{R}$ باشند.
 (الف) نشان دهید که $f + g$ نیز روی S پیوسته یکنواخت است.
 (ب) هرگاه f و g روی S کراندار نیز باشند، آنگاه ثابت کنید که fg نیز پیوسته یکنواخت است.
- ۱۷.۳ فرض کنید f روی (a, b) پیوسته و $f(a^+)$ و $f(b^-)$ هر دو موجود و متناهی باشند، نشان دهید که f روی (a, b) پیوسته یکنواخت است.
- ۱۸.۳ اگر f روی (a, b) پیوسته یکنواخت باشد، ثابت کنید که روی این بازه کراندار است. توجه کنید که اگر f روی این بازه فقط پیوسته باشد، آنگاه مثالی بیاورید که ممکن است f بیکران باشد.
- ۱۹.۳ فرض کنید f تابعی پیوسته و یکنوا روی (a, b) باشد. ثابت کنید که f روی (a, b) پیوسته یکنواخت است اگر و فقط اگر f روی این بازه کراندار باشد.
- ۲۰.۳ تابع f روی مجموعه $S \subseteq \mathbb{R}$ لیپشیتز^۱ نامیده می‌شود هرگاه $K > 0$ چنان موجود باشد که برای هر $x, y \in S$ داشته باشیم

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|.$$

- (الف) ثابت کنید اگر f روی S لیپشیتز باشد، آنگاه f روی این مجموعه پیوسته یکنواخت است.
 (ب) نشان دهید که $f(x) = \sqrt{x}$ روی $[0, 1]$ پیوسته یکنواخت است، اما روی این بازه لیپشیتز نیست.
- ۲۱.۳ تابع $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ را محدب^۲ نامیم هرگاه برای هر $x, y \in (a, b)$ و هر $\lambda \in [0, 1]$ داشته باشیم

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

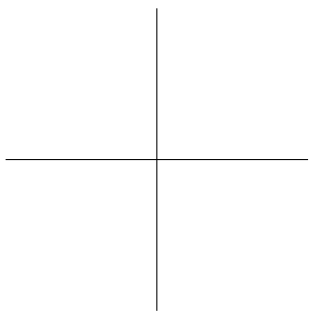
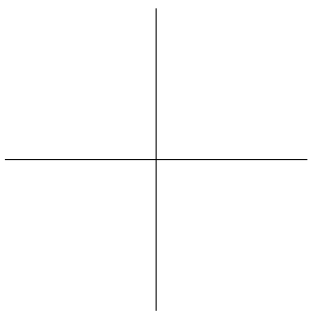
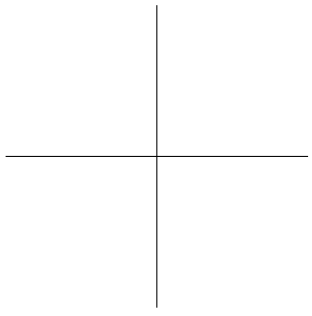
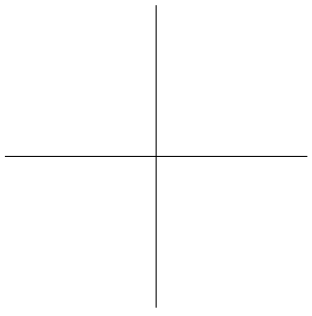
- ثابت کنید اگر f روی (a, b) محدب باشد، آنگاه f روی (a, b) پیوسته است.
- ۲۲.۳ تابع $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ را محدب میانی^۳ نامیم هرگاه برای هر $x, y \in (a, b)$ داشته

¹Lipschitz ²convex function ³midconvex function

باشیم

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}.$$

(الف) ثابت کنید هر تابع محدب میانی و پیوسته روی (a, b) ، پیوسته است.
(ب) ثابت کنید اگر f روی (a, b) محدب میانی و x_0 ای در (a, b) موجود باشد که f روی یک همسایگی از آن از بالا کراندار باشد، نشان دهید f روی (a, b) پیوسته است.



۴

مشتق

مسائل

۱.۴ نشان دهید توابع زیر در $x = 0$ مشتق پذیر هستند:

(الف) $f(x) = x|x|$ ، (ب) $g(x) = x^2|x|$.

۲.۴ نشان دهید که تابع

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \sin \frac{1}{x} & ; x \neq 0, \\ 0 & ; x = 0, \end{cases}$$

در $x = 0$ مشتق پذیر است و علاوه بر این f' در $x = 0$ پیوسته است.

۳.۴ قضیه رول و قضیه مقدار میانگین لاگرانژ را برای تابع $f(x) = |x|$ روی $[-1, 1]$ بررسی کنید.

۴.۴ فرض کنید تابع f بر $(0, 1)$ تعریف شده و دارای مشتق کراندار باشد. ثابت کنید دنباله $a_n = f(\frac{1}{n})$ دارای حد است.

۵.۴ فرض کنید $f(x) = a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \dots + a_n \sin nx$ و برای هر $x \in \mathbb{R}$ ،
 $|f(x)| \leq |\sin x|$ ثابت کنید.

$$|a_1 + 2a_2 + \dots + na_n| \leq 1.$$

۶.۴ فرض کنید $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی باشد که تا مرتبه دوم مشتق پذیر با مشتق‌های پیوسته باشد. ثابت کنید که برای هر $x \in (a, b)$ ،

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} = f''(x).$$

۷.۴ فرض کنید f بر $[0, 1]$ پیوسته، $f(0) = 0$ و $f'(x)$ بر $(0, 1)$ موجود و متناهی باشد. ثابت کنید اگر f' بر $(0, 1)$ صعودی باشد، آنگاه $\frac{f(x)}{x}$ نیز صعودی است.

۸.۴ فرض کنید f بر (a, b) دارای مشتق متناهی و بر $[a, b]$ پیوسته بوده و $f(a) = f(b) = 0$. ثابت کنید برای هر λ ، عددی مانند $c \in (a, b)$ چنان موجود است که

$$f'(c) = \lambda f(c).$$

۹.۴ فرض کنید f بر $[a, b]$ مشتق پذیر بوده $f(a) = 0$ و عدد حقیقی مثبت A چنان موجود باشد به طوری که برای هر $x \in [a, b]$ ، $|f'(x)| \leq A|f(x)|$. ثابت کنید به ازای هر $f(x) = 0, x \in [a, b]$.

۱۰.۴ فرض کنید f تابعی تعریف شده روی \mathbb{R} باشد به طوری که به ازای هر $x, y \in \mathbb{R}$

$$|f(x) - f(y)| \leq (x - y)^2.$$

ثابت کنید که f تابعی ثابت است.

۱۱.۴ فرض کنید f و g توابعی مشتق پذیر روی \mathbb{R} ، $f(0) = g(0)$ و برای هر $x \geq 0$ ،
 $f'(x) \leq g'(x)$. ثابت کنید که به ازای هر $x \geq 0$ ، $f(x) \leq g(x)$.

۱۲.۴ سری مک‌لورن توابع هذلولوی زیر را به دست آورید:

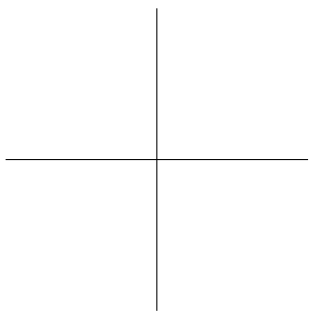
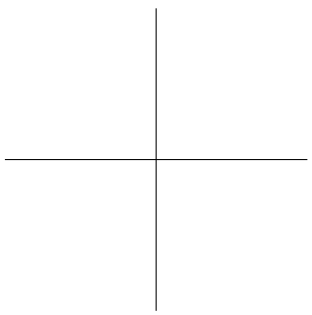
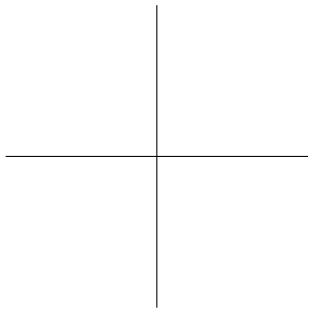
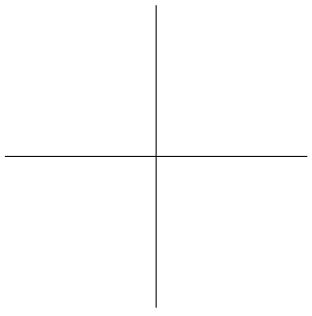
$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

۱۳.۴ فرض کنید $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ مشتق پذیر باشد.

(الف) نشان دهید f محدب است اگر و فقط اگر f' صعودی باشد.

(ب) اگر f دارای مشتق مرتبه دوم روی (a, b) باشد آن گاه f محدب است اگر و فقط اگر

برای هر $x \in (a, b)$ ، $f''(x) \geq 0$.



۵

انتگرال ریمان

مسائل

۱.۵ فرض کنید $0 < a < b$ و

$$f(x) = \begin{cases} 0 & ; x \in [a, b] \cap \mathbb{Q}, \\ x & ; x \in [a, b] \cap \mathbb{Q}^c. \end{cases}$$

انتگرال پایین و بالای f را روی $[a, b]$ به دست آورید و نشان دهید که f ریمان انتگرال پذیر است.

۲.۵ تابع f را روی $[0, 1]$ به صورت زیر تعریف کنید

$$f(x) = \begin{cases} 0 & ; x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}^c \text{ یا } x = 0, \\ \frac{1}{n} & ; x = \frac{m}{n} \in [0, 1] \cap \mathbb{Q} \text{ و } \gcd(m, n) = 1. \end{cases}$$

نشان دهید که f ریمان انتگرال پذیر است و $\int_0^1 f(x) dx = 0$.

- ۳.۵ توابع انتگرال ناپذیر f و g را چنان بیابید که fg انتگرال پذیر باشد.
- ۴.۵ فرض کنید $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی ریمان انتگرال پذیر و $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی باشد که مجموعه $E = \{x \in [a, b] : f(x) \neq g(x)\}$ متناهی است. نشان دهید که g ریمان انتگرال پذیر است و

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(x) dx .$$

- آیا از این می توان نتیجه گرفت که مجموعه E شمارش پذیر است؟
- ۵.۵ هرگاه $\circ > \inf_{x \in [a, b]} |f(x)|$ و $f \in \mathcal{R}[a, b]$ ، آنگاه نشان دهید که $\frac{1}{f} \in \mathcal{R}[a, b]$.
- ۶.۵ با یک مثال نشان دهید که هرگاه $|f|$ ریمان انتگرال پذیر باشد، لزوماً f ریمان انتگرال پذیر نیست.
- ۷.۵ ثابت کنید هرگاه f روی $[a, b]$ نامنفی و پیوسته بوده و $\int_a^b f(x) dx = \circ$ ، آنگاه یا $a = b$ یا روی $[a, b]$ ، $f \equiv \circ$.
- ۸.۵ فرض کنید $f : [a, b] \rightarrow [\alpha, \beta]$ اکیداً صعودی، پیوسته و پوشا باشد. ثابت کنید

$$\int_a^b f(x) dx + \int_\alpha^\beta f^{-1}(t) dt = b\beta - a\alpha .$$

- ۹.۵ فرض کنید f روی $[a, b]$ تابعی نامنفی و پیوسته بوده و $\circ > c$ باشد. اگر برای هر $x \in [a, b]$ داشته باشیم

$$f(x) \leq c \int_a^x f(t) dt ,$$

- ثابت کنید که روی $[a, b]$ ، $f \equiv \circ$.
- ۱۰.۵ (قضیه دوم مقدار میانگین برای انتگرال ها) ثابت کنید اگر f و g روی $[a, b]$ تعریف شده و g پیوسته، $\circ \geq f$ و f انتگرال پذیر باشد، آنگاه نقطه $c \in (a, b)$ چنان موجود است که

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = g(c) \int_a^b f(x) dx .$$

۱۱.۵ فرض کنید f تابعی نامنفی و پیوسته بر $[a, b]$ بوده و M ماکزیمم مقدار f روی $[a, b]$ باشد. نشان دهید که

$$M = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_a^b f^n(x) dx \right)^{\frac{1}{n}}.$$

۱۲.۵ فرض کنید f تابعی کراندار روی $[a, b]$ باشد. هرگاه دنباله $\{P_n\}$ از افرازهای $[a, b]$ چنان موجود باشد که $\lim_{n \rightarrow \infty} (U(P_n, f) - L(P_n, f)) = 0$ ، آنگاه ثابت کنید که $f \in \mathcal{R}[a, b]$ و

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} U(P_n, f) = \lim_{n \rightarrow \infty} L(P_n, f).$$

آیا عکس این مطلب نیز درست است؟

۱۳.۵ فرض کنید f, g و h سه تابع کراندار روی $[a, b]$ باشند که برای هر $x \in [a, b]$ ، $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ اگر $f, h \in \mathcal{R}[a, b]$ و

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b h(x) dx = \alpha,$$

آنگاه ثابت کنید که $g \in \mathcal{R}[a, b]$ و $\int_a^b g(x) dx = \alpha$.

۱۴.۵ فرض کنید $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی کراندار و مجموعه نقاط پیوستگی f حداکثر شمارش پذیر باشد. نشان دهید $f \in \mathcal{R}$.

۱۵.۵ فرض کنید f تابع پیوسته‌ای روی $[a, b]$ باشد که برای هر تابع پیوسته g روی $[a, b]$

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = 0.$$

ثابت کنید که روی $[a, b]$ ، $f \equiv 0$.

۱۶.۵ اگر $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی صعودی باشد آنگاه تابع میانگین حسابی

$$F(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt \quad (x > 0)$$

نیز صعودی است.

۱۷.۵ فرض کنید f روی $[0, 1]$ انتگرال پذیر باشد. نشان دهید که

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 x^n f(x) dx = 0.$$

۱۸.۵ (مشتق گیری از انتگرال) فرض کنید f تابعی پیوسته u و v توابعی مشتق پذیر روی $[a, b]$ باشند. تابع $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ را به صورت

$$F(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t) dt$$

در نظر بگیرید. نشان دهید F مشتق پذیر است و

$$F'(x) = f(v(x))v'(x) - f(u(x))u'(x).$$

۱۹.۵ برای هر دو عدد طبیعی m و n ، ثابت کنید

$$\int_0^1 x^n (1-x)^m dx = \int_0^1 x^m (1-x)^n dx.$$

۲۰.۵ فرض کنید $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ تابعی پیوسته باشد. ثابت کنید که معادله زیر دارای جوابی منحصر بفرد در $[0, 1]$ است

$$2x - \int_0^x f(t) dt = 1.$$

۲۱.۵ فرض کنید $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ توابع پیوسته ای باشند که برای هر $x \in \mathbb{R}$ ، $f(x+1) = f(x)$ و $g(x+1) = g(x)$ ثابت کنید

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f(x)g(nx) dx = \left(\int_0^1 f(x) dx \right) \left(\int_0^1 g(x) dx \right).$$

۲۲.۵ فرض کنید p و q اعداد حقیقی مثبتی باشند به طوری که $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. گزاره های زیر را ثابت کنید:

(الف) اگر $u \geq 0$ و $v \geq 0$ ، آنگاه

$$uv \leq \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q}.$$

تساوی برقرار است اگر و فقط اگر $u^p = v^q$.
 (ب) اگر $f, g \geq 0$ بوده و $f, g \in \mathcal{R}[a, b]$ و

$$\int_a^b f(x) \, dx = 1 = \int_a^b g(x) \, dx,$$

آن‌گاه

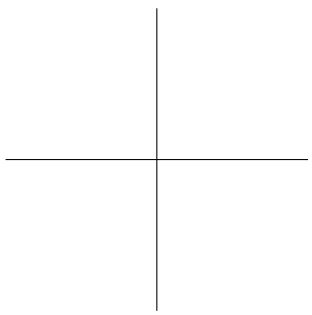
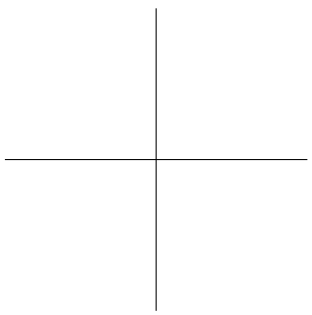
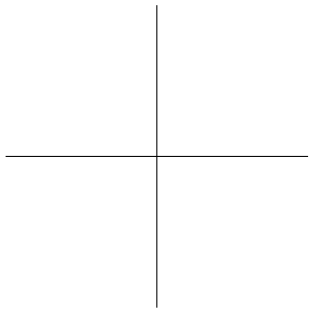
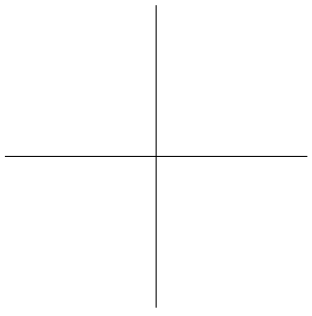
$$\int_a^b f(x)g(x) \, dx \leq 1.$$

(ج) اگر f و g توابع مختلطی در $\mathcal{R}[a, b]$ باشند، آن‌گاه

$$\left| \int_a^b f(x)g(x) \, dx \right| \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q \, dx \right)^{\frac{1}{q}}.$$

نامساوی اخیر را نامساوی هولدر^۱ می‌نامیم. در صورتی که $p = q = ۲$ باشد، آن را نامساوی کوشی-شوارتز^۲ می‌نامند.

¹Hölder inequality ²Cauchy-Schwartz inequality



۶

دنباله‌ها و سری‌های توابع

مسائل

- ۱.۶ نشان دهید که هرگاه $\{f_n\}$ و $\{g_n\}$ روی مجموعه E به‌طور یکنواخت همگرا باشند، آن‌گاه $\{f_n + g_n\}$ نیز روی E به‌طور یکنواخت همگرا است. هرگاه علاوه‌براین، $\{f_n\}$ و $\{g_n\}$ دنباله‌هایی از توابع کرندار باشند، ثابت کنید $\{f_n g_n\}$ بر E به‌طور یکنواخت همگرا خواهد بود. دنباله‌های $\{f_n\}$ و $\{g_n\}$ را طوری بسازید که بر مجموعه‌ای چون E به‌طور یکنواخت همگرا باشند، ولی $\{f_n g_n\}$ بر E به‌طور یکنواخت همگرا نباشد.
- ۲.۶ نشان دهید که دنباله توابع $\left\{ \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{n}} \right\}$ بر $(0, \pi)$ همگرای نقطه‌ای است ولی همگرای یکنواخت نیست.
- ۳.۶ فرض کنید

$$f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n}.$$

نشان دهید که $\{f_n\}$ روی \mathbb{R} همگرای یکنواخت است.

۴.۶ فرض کنید

$$f_n(x) = xe^{-nx}.$$

(الف) نشان دهید که $\{f_n\}$ روی $[0, +\infty)$ به تابع $f(x) = 0$ همگرای نقطه‌ای است.

(ب) فرض کنید $M_n = \sup\{|f_n(x)| : x \in [0, +\infty)\}$. نشان دهید که

$$M_n = \frac{1}{ne}.$$

(ج) نتیجه بگیرید که روی $[0, +\infty)$ دنباله $\{f_n\}$ همگرای یکنواخت است.

۵.۶ دنباله توابع $\{f_n\}$ روی $[0, 1]$ را به صورت $f_n(x) = x^n$ در نظر بگیرید.

(الف) نشان دهید که روی $[0, 1]$ ، $\{f_n\}$ همگرای نقطه‌ای است.

(ب) نشان دهید که $\{f_n\}$ روی $[0, 1]$ همگرای یکنواخت نیست.

(ج) زیرمجموعه‌ای از $[0, 1]$ را چنان بیابید که $\{f_n\}$ روی آن همگرای یکنواخت باشد.

۶.۶ فرض کنید $f_n(x) = \frac{x}{n}$ باشد. نشان دهید که $\{f_n\}$ بر \mathbb{R} همگرای نقطه‌ای به تابع

$f(x) = 0$ است. هرگاه E زیرمجموعه کرانداری از \mathbb{R} باشد، آنگاه ثابت کنید که روی

$$E, f_n \xrightarrow{u} f, \text{ در حالی که روی } \mathbb{R}, f_n \not\xrightarrow{u} f.$$

۷.۶ دنباله توابع $\{f_n\}$ را به صورت زیر در نظر بگیرید

$$f_n(x) = \frac{x}{1 + nx^2}.$$

نشان دهید که $\{f_n\}$ به طور یکنواخت به تابعی چون f همگرا است و تساوی

$$f'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x)$$

برای $x \neq 0$ درست و برای $x = 0$ درست نیست.

۸.۶ هرگاه $\{f_n\}$ روی \mathbb{R} به تابع پیوسته f همگرای یکنواخت باشد، آنگاه ثابت کنید که

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n \left(x + \frac{1}{n} \right) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

۹.۶ فرض کنید $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ پیوسته یکنواخت باشد. برای هر $n \in \mathbb{N}$ دنباله توابع $\{f_n\}$ را به صورت زیر تعریف کنید

$$f_n(x) = f\left(x + \frac{1}{n}\right).$$

نشان دهید روی \mathbb{R} ، $f_n \xrightarrow{u} f$.

۱۰.۶ فرض کنید $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع پیوسته روی $[a, b]$ باشد که $f_n \xrightarrow{u} f$. قرار دهید

$$F_n(x) = \int_a^x f_n(t) dt \quad \text{و} \quad F(x) = \int_a^x f(t) dt.$$

(الف) نشان دهید توابع F و F_n روی $[a, b]$ تعریف شده‌اند.

(ب) نشان دهید روی $[a, b]$ ، $F_n \xrightarrow{u} F$.

۱۱.۶ نشان دهید دنباله توابع تعریف شده با

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & ; x < \frac{1}{n+1}, \\ \sin^2 \frac{\pi}{x} & ; \frac{1}{n+1} \leq x \leq \frac{1}{n}, \\ 0 & ; x > \frac{1}{n}, \end{cases}$$

به یک تابع f روی \mathbb{R} همگرایی نقطه‌ای است. آیا این همگرایی یکنواخت نیز هست؟

۱۲.۶ فرض کنید $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع حقیقی پیوسته روی $[a, b]$ باشد که $f_n \xrightarrow{u} f$. ثابت کنید

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^{b - \frac{1}{n}} f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

۱۳.۶ فرض کنید $f_n \xrightarrow{u} f$ روی یک مجموعه E و $\{x_n\}$ دنباله‌ای از نقاط E باشد که به نقطه $x \in E$ همگرا است. نشان دهید

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_n) = f(x).$$

۱۴.۶ فرض کنید X مجموعه همه چندجمله‌ای‌های روی $[0, 1]$ بوده و d متر تعریف شده روی X به صورت زیر باشد

$$d(f, g) = \max_{x \in [0, 1]} |f(x) - g(x)|.$$

(الف) قرار دهید

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}.$$

نشان دهید که دنباله توابع $\{f_n\}$ روی $[0, 1]$ همگرای یکنواخت است.

(ب) نشان دهید که فضای متریک (X, d) کامل نیست.

۱۵.۶ نشان دهید که $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n^2}$ روی $[-1, 1]$ همگرای یکنواخت است.

۱۶.۶ (الف) با استفاده از مجموع سری هندسی نشان دهید که

$$\frac{1}{1 - e^{-x}} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx}, \quad (x > 0).$$

(ب) توضیح دهید که چگونه با مشتق‌گیری جمله‌به‌جمله از سری فوق می‌توان نشان داد

که

$$\frac{e^{-x}}{(1 - e^{-x})^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n e^{-nx}, \quad (x > 0).$$

(ج) آیا سری $\sum_{n=1}^{\infty} n e^{-nx}$ روی $(0, +\infty)$ همگرای یکنواخت است؟

۱۷.۶ (الف) نشان دهید که که سری

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{x}{n}}{n}$$

روی \mathbb{R} همگرای یکنواخت است.

(ب) نشان دهید که تابع f مشتق‌پذیر است و تابع مشتق $f'(x)$ را به صورت صریح به

دست آورید.

۱۸.۶ ابتدا نشان دهید که

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx), \quad x \in (-\pi, \pi).$$

اگر از تساوی بالا، جمله‌به‌جمله مشتق بگیریم، خواهیم داشت

$$1 = \sum_{n=1}^{\infty} 2(-1)^{n+1} \cos(nx), \quad x \in (-\pi, \pi).$$

آیا رابطه فوق درست است؟

۱۹.۶ نشان دهید سری $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ که

$$f_n(x) = \frac{x^2}{(1+x^2)^n}, \quad (x \in \mathbb{R})$$

همگرای نقطه‌ای است، و هر جمله از سری پیوسته است، اما تابع مجموع پیوسته نیست.

۲۰.۶ نشان دهید سری

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$$

بر هر بازه‌ای که شامل $x = 0$ باشد همگرای یکنواخت نیست.

۲۱.۶ ثابت کنید سری

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n(1+nx^2)}$$

در \mathbb{R} همگرای یکنواخت است.

۲۲.۶ (الف) نشان دهید که سری

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+n^2x}$$

برای $x > 0$ همگرا و برای $x = 0$ واگرا است.

(ب) نشان دهید که برای هر $a > 0$ ، سری فوق روی $[a, +\infty)$ به طور یکنواخت همگرا است.

(ج) تعریف کنید

$$f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+n^2x}.$$

نشان دهید که f پیوسته است.

(د) نشان دهید که سری روی $(0, +\infty)$ همگرای یکنواخت نیست.

۲۳.۶ هرگاه سری $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ یک سری همگرا با جمله‌های نامنفی بوده و $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

باشد که $x \in (-1, 1)$ ، ثابت کنید که f روی $(-1, 1)$ پیوسته است.

۲۴.۶ هرگاه برای یک M به قدر کافی بزرگ، $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < M$ ، آنگاه ثابت کنید

$$\int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}.$$

۲۵.۶ با استفاده از آزمون M -وایرستراس نشان دهید سری‌های زیر برای $p > 1$ همگرای یکنواخت هستند

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^p} \quad \text{و} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^p}.$$

۲۶.۶ (الف) نشان دهید که سری

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan(nx)}{n^2}$$

روی \mathbb{R} همگرای یکنواخت است، و توضیح دهید که چرا تابع f تعریف شده با

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan(nx)}{n^2}$$

روی \mathbb{R} پیوسته است.

(ب) نشان دهید که f در هر نقطه $x \neq 0$ مشتق پذیر است. تابع $f'(x)$ را محاسبه کنید.

(ج) نشان دهید که f در $x = 0$ مشتق پذیر نیست.

۲۷.۶ با استفاده از سری هندسی $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ برای $|x| < 1$ ، این مسئله روشی را برای محاسبه عدد π ارائه می‌کند.

(الف) نشان دهید برای هر $x \in (-1, 1)$ داریم

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}.$$

(ب) نشان دهید برای هر $y \in [0, 1)$

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

(ج) ثابت کنید که تساوی قسمت (ب) برای $x = 1$ نیز درست است.

(د) ثابت کنید

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1}.$$

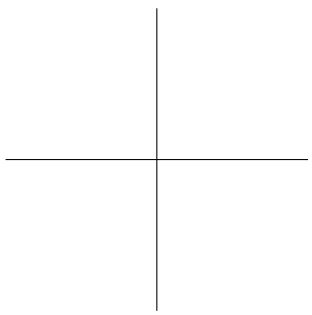
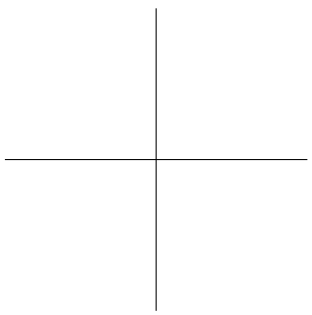
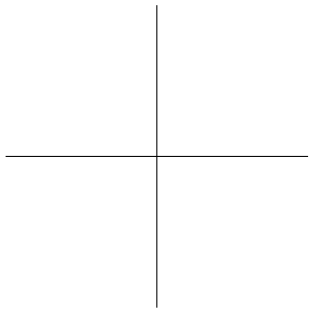
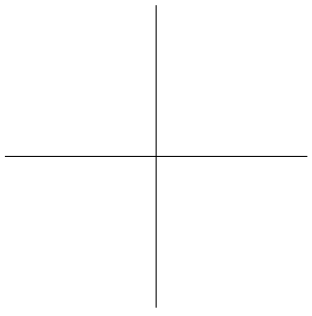
۲۸.۶ (الف) نشان دهید که سری

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$$

برای هر $a > 1$ ، روی بازه $[a, +\infty)$ همگرای یکنواخت است.

(ب) برای هر $x > 1$ ، قرار دهید $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$. نشان دهید که

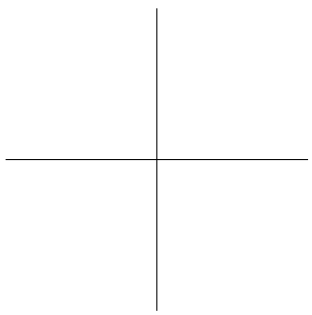
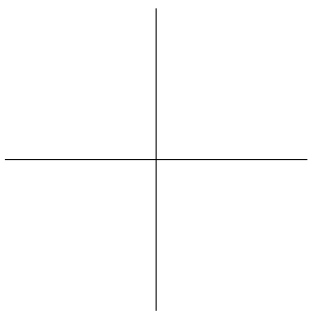
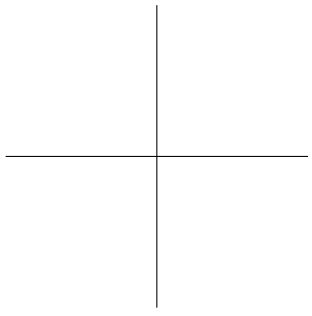
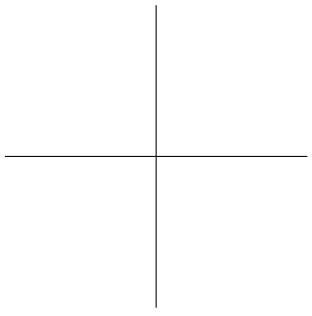
$$f'(x) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln x}{n^x}.$$



منابع

- [1] A.G. Aksoy and M.A. Khamsi, *A problem book in real analysis*, Springer, 2010.
- [2] O. Hijab, *Introduction to calculus and classical analysis*, Springer, 2011.
- [3] H. Hosseini Giv, *Mathematical analysis and its inherent nature*, AMS, 2016.
- [4] W.J. Kaczor and M.T. Nowak, *Problems in mathematical analysis I*, AMS, 1996.
- [5] W.J. Kaczor and M.T. Nowak, *Problems in mathematical analysis II*, AMS, 1998.
- [6] W.J. Kaczor and M.T. Nowak, *Problems in mathematical analysis III*, AMS, 2000.
- [7] S. Kumaresan, *Topology of metric spaces*, Alpha Sciences International Ltd., 2005.
- [8] T.L. Lindstrøm, *Spaces, an introduction to real analysis*, AMS, 2017.

- [9] W. Rudin, *Principles of mathematical analysis*, 3rd ed., Mc Graw Hill, 1976.
- [10] R.B. Schinazi, *From classical to modern analysis*, Birkhäuser, 2018.
- [11] K.A. Stromberg, *An introduction to classical real analysis*, AMS Chelsea Publishing, 2015.
- [12] T-L.T. Rădulescu, V.D. Rădulescu and T. Andreescu, *Problems in real analysis: Advanced calculus on the real axis*, Springer, 2009.
- [۱۳] ج. روئین و ع. مرصعی، مبانی نظریه نامساوی‌ها، انتشارات دانشگاه زنجان، ۱۳۹۸.
- [۱۴] ع. مرصعی، آنالیز ریاضی، انتشارات سلاله زنجان، ۱۳۸۲.





Fundamentals of Mathematical Analysis

By:

Ali Morassaei

Faculty Member of the University of Zanjan

The University of Zanjan Press

2020

