

مسائل ریاضیات و محاسبات در داروسازی

تهیه و تنظیم: علی مرصعی

توابع نمایی و لگاریتمی

۱. دامنه تابع $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ را به دست آورید. سپس زوج یا فرد بودن آن را مشخص کنید. همچنین نشان دهید تابع f وارون پذیر بوده و وارون آن را به دست آورید.

۲. حد توابع زیر را محاسبه کنید

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x \quad (\text{آ})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x)^{1/x} \quad (\text{ب})$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}\right) \quad (\text{ج})$$

$$\lim_{x \rightarrow e} \frac{\ln x - 1}{x - e} \quad (\text{د})$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - e}{x - 1} \quad (\text{ه})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{x^2} \quad (\text{و})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{x} \quad (\text{ز})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin 2x} - e^{\sin x}}{x} \quad (\text{ح})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)^{2x} \quad (\text{ط})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)^{\frac{1}{\ln \sqrt{x}}} \quad (\text{ی})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (e^x + x)^{\frac{1}{x}} \quad (\text{ک})$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x)^{\frac{1}{x}} \quad (\text{ل})$$

۳. مشتق توابع زیر را به دست آورید

$$xe^x \quad (\text{آ})$$

$$\frac{\cos x}{e^x} \quad (\text{ب})$$

$$x^2 e^{-x^2} \quad (\text{ج})$$

$$xe^x (\sin x + \cos x) \quad (\text{د})$$

$$(\ln x)^2 \quad (\text{ه})$$

$$x^x \ln x \quad (\text{و})$$

$$\frac{1 - \ln x}{1 + \ln x} \quad (\text{ز})$$

$$\ln(\ln(\ln x)) \quad (\text{ح})$$

$$\ln(\ln^2(\ln^3 x)) \quad (\text{ط})$$

$$\ln(x + \sqrt{1+x^2}) \quad (\text{ی})$$

$$x(\sin(\ln x) - \cos(\ln x)) \quad (\text{ک})$$

$$x^{x^2} \quad (\text{ل})$$

$$x^{\sin x} \quad (\text{م})$$

$$x^{x^x} \quad (\text{ن})$$

$$(\ln x)^x \quad (\text{س})$$

۴. نمودار توابع زیر را رسم کنید

$$f(x) = 2 \sin x + \cos 2x \quad (\text{آ})$$

$$g(x) = 2x^2 + \ln x \quad (\text{ب})$$

$$y = \ln(1 + x^2) \quad (\text{ج})$$

$$y = x^x \quad (\text{د})$$

$$y = e^{\sqrt[3]{x}} \quad (\text{ه})$$

$$y = e^{\arctan x} \quad (\text{و})$$

انتگرال

۳. حاصل انتگرال‌های معین زیر را بدست آورید:

$$\int_0^1 (x + 3) dx$$

(آ)

۱. شیب یک منحنی برابر با $\frac{dy}{dx} = 3x^2 + 2x$ است. معادله این منحنی را طوری تعیین کنید

که از نقطه $(1, 1)$ بگذرد.

$$\int_0^1 2e^x dx$$

(ب)

۲. انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید:

$$\int_{-1}^2 (x + 2)^2 dx$$

(ج)

$$\int (\sqrt{5}x^2 - 3x + \sqrt{x}) dx$$

(آ)

$$\int t^2(1+t)^2 dt$$

(د)

$$\int (2e^x - 3^x) dx$$

(ب)

$$\int_1^2 \frac{x^6 + 1}{x^2} dx$$

(ه)

$$\int \left(\frac{1}{\sqrt{4-x^2}} + \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} \right) dx$$

(ج)

$$\int_0^2 |1-x| dx$$

(و)

$$\int (\sin 2x + \cos x) dx$$

(د)

۴. با استفاده از روش‌های انتگرال‌گیری،
انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید:

$$\int \frac{x^2 - \sqrt{x}}{x^3} dx$$

(آ)

$$\int x(x+1)^n dx, (n \in \mathbb{N})$$

(ه)

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-9}} dx$$

(ب)

$$\int (\tan^3 x + \tan x) dx$$

(و)

$$\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^4} dx$$

(ج)

$$\int (e^x + 3^x)^2 dx$$

(ز)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x-2}\sqrt{3-x}}$$

(د)

$$\int \frac{x+1}{\sqrt{(x^2+2x+1)^2}} dx$$

(ح)

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{2x-x^2}}$$

(ه)

$$\int \frac{dx}{x^2-1}$$

(ط)

- (ق) $\int \sin^3 \theta \tan^2 \theta d\theta$ (و) $\int x e^{\sqrt{x}} dx$
۵. همگرایی یا واگرایی انتگرال‌های ناسره زیر را مشخص کنید: (ز) $\int x \sin^2 x dx$
- (آ) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3}$ (ح) $\int_2^3 (\ln x)^2 dx$
- (ب) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{x^4 + 1} dx$ (ط) $\int x^2 \ln x dx$
- (ج) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+2)^3}$ (ی) $\int \sin \sqrt{x} dx$
- (د) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$ (ک) $\int e^{\sqrt{x}} dx$
- (ه) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$ (ل) $\int \frac{dx}{x^2 - 2x + 3}$
- (و) $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ (م) $\int \frac{dx}{16x^2 + 25}$
۶. مساحت ناحیه محصور بین دو منحنی را در فاصله داده شده پیدا کنید: (ن) $\int \frac{x}{16x^2 + 25} dx$
- (آ) $y = x^2, y = x^3, [0, 1]$ (س) $\int \frac{2x^2 + 3x + 2}{(x+1)^3} dx$
- (ب) $y = x^3, y = -x, [1, 2]$ (ع) $\frac{dx}{x^2 + 2x + 3}$
- (ج) $y = 1 + x, y = \ln x, [1, e]$ (ف) $\int \sin^2 x dx$
۷. مساحت ناحیه محصور بین منحنی‌ها را بدست آورید: (ص) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \theta d\theta$
- (آ) $y = 2x^2, y = x + 1$
- (ب) $y = \frac{1}{x^2}, y = 0, x = 1, x = 3$
- (ج) $y = \tan x, x = \frac{\pi}{4}, (x \geq 0)$

مشتقات جزئی

۱. مشتقات جزئی توابع زیر را محاسبه کنید:

$$f(x, y) = y \sin(xy) \quad (\text{آ})$$

$$f(x, y) = \frac{y}{y + \cos x} \quad (\text{ب})$$

$$f(x, y) = x \cos y + ye^x \quad (\text{ج})$$

$$f(x, y) = x^y \quad (\text{د})$$

$$f(x, y) = \log_y x \quad (\text{ه})$$

$$f(x, y, z) = \arcsin(xyz) \quad (\text{و})$$

$$f(x, y) = e^{(x+y+1)} \quad (\text{ز})$$

$$f(x, y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \quad (\text{ح})$$

$$f(x, y) = e^{xy} \ln y \quad (\text{ط})$$

$$f(x, y) = \cos^2(3x - y^2) \quad (\text{ی})$$

$$f(x, y) = \ln(x + y) \quad (\text{ک})$$

$$f(x, y) = e^x + x \ln y + y \ln x \quad (\text{ل})$$

۲. فرض کنید $w = xy$ بوده و $x = \cos t$ و

$$y = \sin t \quad \frac{dw}{dt} \text{ مطلوب است.}$$

۳. مشتق $\frac{dw}{dt}$ را چنان پیدا کنید که $w = xy + z$

$$z = t \text{ و } y = \sin t, x = \cos t$$

۴. مشتقات جزئی $\frac{\partial w}{\partial r}$ و $\frac{\partial w}{\partial s}$ را بدست آورید با

$$x = \frac{r}{s}, w = x + 2y + z^2 \text{ که } y = r^2 + \ln s$$

$$z = 2r \text{ و } y = r^2 + \ln s$$

تبدیلات لاپلاس

۱. تبدیل لاپلاس توابع زیر را به دست آورید

$$f(t) = 3t - 1 + \cos 2t \quad (\text{آ})$$

$$f(t) = t \sin t \quad (\text{ب})$$

$$f(t) = e^{3t} \cos 2t - e^t \sin 5t \quad (\text{ج})$$

$$f(t) = \int_0^t e^x \cos 2x dx \quad (\text{د})$$

$$f(t) = \frac{d}{dt}(te^{5t}) \quad (\text{ه})$$

$$f(t) = \begin{cases} 1 & ; 0 \leq t < 1 \\ -1 & ; 1 \leq t < 2 \\ 0 & ; t \geq 2 \end{cases} \quad (\text{و})$$

$$f(t) = \sin \sqrt{t} \quad (\text{ز})$$

۲. تبدیل لاپلاس معکوس توابع زیر را به دست آورید

$$\varphi(s) = \frac{s+3}{s^2-s} \quad (\text{آ})$$

$$\varphi(s) = \frac{1}{s^2-3s^2+2s} \quad (\text{ب})$$

$$\varphi(s) = \frac{s^2}{s^2-5s^2+4} \quad (\text{ج})$$

$$\varphi(s) = \frac{2a^2}{(s^2+a^2)^2} \quad (\text{د})$$

$$\varphi(s) = \arctan\left(\frac{1}{s}\right) \quad (\text{ه})$$

$$\varphi(s) = \ln\left(\frac{s+1}{s-1}\right) \quad (\text{و})$$

۳. معادلات دیفرانسیل زیر را با استفاده از تبدیلات لاپلاس حل کنید

$$y'' - 6y' + 9y = 6x^2 e^{3x} \quad (\text{آ})$$

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

$$xy'' + y' + xy = 0 \quad (\text{ب})$$

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

$$y'' - 3y' + 2y = 24 \cos x \quad (\text{ج})$$

$$y(0) = 6, \quad y'(0) = -3$$

$$(x+2)y'' + (x+1)y' - y = 0 \quad (\text{د})$$

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 2$$